Lógica Computacional

- Indução Matemática
- Definições Indutivas
- Demonstrações por Indução
- Exemplos

Demonstração de Fórmulas Universais

- Quer no sistema $\mathcal{DN}$ de dedução natural quer no sistema $\mathcal{R}$ baseado em resolução é possível demonstrar fórmulas com a forma

$$\forall x \ (S(x) \rightarrow P(x))$$

- Estas fórmulas podem ser interpretadas como indicando que todos os objectos que gozam da propriedade **S** também gozam da propriedade **P**.

- Intuitivamente podemos considerar que os objectos que gozam da propriedade **S** constituem um conjunto $\mathcal{S}$ (axioma da *Compreensão* da Teoria de Conjuntos).

- Neste contexto, pode interpretar-se a fórmula acima como declarando que todos os objectos do conjunto $\mathcal{S}$ gozam da propriedade **P** (ou estão incluídos no conjunto $\mathcal{P}$ dos objectos que gozam da propriedade **P**).

- No entanto, para alguns conjuntos, existe uma regra de inferência que pode ser utilizada para mais facilmente se obterem fórmulas universais como as indicadas acima.

- Este é o caso dos conjuntos caracterizados por uma definição **indutiva**.

Definições Indutivas

- Estas definições são particularmente apropriadas para conjuntos infinitos com uma estrutura indutiva, isto é em que elementos mais *complexos* podem ser obtidos através de *regras* aplicadas a elementos mais *simples*.

- Formalmente, qualquer definição indutiva de um conjunto $\mathcal{S}$ contém três componentes:
  - **Cláusula(s) de Base:**
    - Esta cláusula define os elementos "mais simples" de $\mathcal{S}$
  - **Cláusula(s) Indutivas**
    - Quais os elementos "seguintes" de $\mathcal{S}$
  - **Cláusula de Exaustão**
    - O conjunto $\mathcal{S}$ não tem mais elementos

- Alguns exemplos de conjuntos definidos indutivamente são ilustradas de seguida, nomeadamente os conjuntos de:
  - $\mathcal{B}$: Expressões com operadores binários
  - $\mathcal{F}$: Fracções Contínuas
  - $\mathcal{N}$: Números naturais

Expressões Binárias

$\mathcal{B}$: Expressões Binárias

- Podemos definir as expressões binárias como um tipo especial de expressões aritméticas constituídas apenas por números naturais e pelos operadores binários de soma, subtração, produto e divisão.

- Naturalmente estas fórmulas sem parênteses não são muito úteis em álgebra, mas servem para ilustrar uma definição indutiva simples. As fórmulas algébricas usuais podem ser igualmente definidas indutivamente mas as cláusulas são um pouco mais complicadas, incluindo os parênteses.

Exemplos:

- 23 + 4 * 5 / 66 $\in \mathcal{B}$
- \+ 5 + 7 * 2 $\notin \mathcal{B}$ (o operador unário "+" não está previsto)
- \- 5 * - 3 $\notin \mathcal{B}$ (o operador unário "-" não está previsto)

Expressões Binárias

$\mathcal{B}$: Expressões Binárias

- Formalmente, uma expressão binária é definida indutivamente pelas cláusulas abaixo

(B1) Cláusula Base: $\forall$**n (N(n) $\rightarrow$ B(n))**

Qualquer número natural é uma fórmula binária.

(B2) Cláusulas de Indução:

(a) $\forall$b1 $\forall$b2(B(b1) $\wedge$ B(b2) $\rightarrow$ B(b1+b2)

(b) $\forall$b1 $\forall$b2(B(b1) $\wedge$ B(b2) $\rightarrow$ B(b1-b2)

(c) $\forall$b1 $\forall$b2(B(b1) $\wedge$ B(b2) $\rightarrow$ B(b1*b2)

(d) $\forall$b1 $\forall$b2(B(b1) $\wedge$ B(b2) $\rightarrow$ B(b1/b2)

A soma, subtracção, multiplicação e divisão de expressões binárias são igualmente expressões binárias.

(B3) Cláusula de Exaustão:

Não há mais expressões binárias para além das obtidas por aplicação repetidas das claúsulas (**B1**) e (**B2a**) - (**B2d**) acima.

Fracções Contínuas

$\mathcal{F}$: Fracções Contínuas

- Informalmente, uma fracção contínua, é definida como:
  - 0; ou
  - uma fração com numerador 1 e cujo denominador é um inteiro somado com uma fração contínua.

$$k + \cfrac{1}{i_1 + \cfrac{1}{i_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{i_n + \ldots}}}}$$

- Em geral qualquer número real (racional ou irracional) pode ser representado através de uma parte inteira e uma parte decimal, correspondente a uma fracção contínua, sendo esta representada por uma sequência

  [i₁, i₂, i₃, …, iₙ, …],

  (infinita no caso de números irracionais). Por exemplo

$$1/3 = 0 + [3] \qquad 1/3 = 0 + \frac{1}{3+0}$$

$$\sqrt{2} = 1 + [2,2,2,2,2,2,\ldots]$$

$$e = 2 + [\,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\ldots]$$

Fracções Contínuas

$\mathcal{F}$: **Fracções Contínuas**

Exemplo:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

- O número irracional √2 = 1.414213562…, pode ser representado pela fracção contínua infinita

1 + [2,2,2,2,2,2, …]

como se pode observar pelas sucessivas aproximações:

- 1 + [2] = 1 + 1/2 = 1 + 0.5 = 1.5
- 1 + [2, 2] = 1 + 1/(2+1/2) = 1.4
- 1 + [2, 2, 2] = 1 + 1/(2+1/(2+1/2)) = 1.41666
- 1 + [2, 2, 2, 2] = 1 + 1/(2+1/(2+1/2)) = 1.41379
- 1 + [2, 2, 2, 2, 2] = 1 + 1/(2+1/(2+1/(2+1/2))) = 1.41429
- 1 + [2, 2, 2, 2, 2, 2] = 1 + 1/(2+1/(2+1/(2+1/(2+1/2)))) = 1.41420
- 1 + [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2] = 1 + 1/(2+1/(2+1/(2+1/(2+1/(2+1/2))))) = 1 + 0.4 = 1.41422

Fracções Contínuas

$\mathcal{F}$: Fracções Contínuas

- Formalmente, uma fracção contínua é definida indutivamente pelas cláusulas abaixo

(F1) Cláusula Base: **`F(0)`**

0 é uma fração contínua.

(F2) Cláusula de Indução: $\forall i\ \forall f\ (F(f) \wedge N(n) \rightarrow F(1/(n + f)))$

Se f é uma fração contínua, e **`n`** é um número natural, então a fracção **`1/(n+f)`** é igualmente uma fracção contínua.

(F3) Cláusula de Exaustão:

Não há mais fracções contínuas para além das obtidas por aplicação repetidas das claúsulas (**F1**) e (**F2**) acima.

Números Inteiros

$\mathcal{N}$: Números Naturais

- Os números naturais (assume-se começados por 0), utilizados nas anteriores definições indutivas, podem ser igualmente definidos indutivamente da forma habitual:

(N1) Cláusula Base: `N(0)`

0 é um número natural.

(N2) Cláusula de Indução: `∀n (N(n) → N(n+1))`

Se `n` é um número natural, o seu sucessor, `n+1`, também é um número natural.

(F3) Cláusula de Exaustão:

Não há mais números naturais para além dos obtidas por aplicação repetidas das claúsulas (N1) e (N2) acima.

Exemplos: Esta definição permite determinar os números que são ou não naturais.

- $2345 \in \mathcal{N}$
- $2.5 \notin \mathcal{N}$
- $-3 \notin \mathcal{N}$

Indução Matemática

- O método de indução matemática é um método de demonstração particular para fórmulas universais, nomeadamente dependentes de conjuntos indutivos

$$\forall x \; (I(x) \rightarrow P(x))$$

- Intuitivamente, para demonstrar uma propriedade P para todos os elementos de um conjunto indutivo I pode tirar-se partido da sua estrutura e fazer a demonstração em dois passos, ao estilo de “dominós”

  - **(1) Passo(s) de Base**
    - Demonstração a propriedade P para os elementos “mais simples” de I
  - **(2) Passo(s) de Indução:**
    - Demonstração que o que é válido para um elemento de I é válido para todos os elementos “seguintes”.

- Ao contrário do método de indução utilizado nas ciências experimentais, em que se generalizam para uma lei universal as observação realizadas para casos particulares, a indução matemática descrita acima é um método de demonstração **válido**.

Indução Matemática

- Nas ciências experimentais, todas as leis e teorias obtidas por indução devem ser consideradas leis **aproximadas** e **sujeitas a revisão** (logo **não válidas**), logo que as suas previsões deixem de ser compatíveis com (novas) observações.
- Estas observações podem invalidar as previsões feitas com as leis até então aceites e levar à formulação de teorias mais exactas.
- O caso mais exemplar desta situação é a substituição da **Teoria da Gravidade** de Newton **pela Teoria da Relatividade Generalizada** de Einstein, em que os erros de previsão da primeira se manifestam para velocidades próximas da velocidade da luz (e.g. variação da massa de um corpo).
- Já a indução matemática é um método **válido**, demonstrando propriedades para **todos** os (tipicamente infinitos) elementos de um conjunto indutivo
  - O efeito **dominó** garante a propriedade para todos os elementos definidos pelas **cláusulas de base** e **de indução**.
  - A **cláusula de exaustão** garante não haver mais elementos no conjunto, garantindo-se assim a universalidade da propriedade.
- Alguns exemplos abaixo ilustram o método de demonstração por indução.

Indução Matemática

Propriedade: Qualquer expressão binária inclui pelo menos um número natural.

Passo Base:

Como a(s) expressão(ões) binária(s) mais simples é (são) um qualquer número **`n`**, natural, o passo base fica demonstrado.

Passo Indução:

Assuma-se a hipótese de indução, isto é que **`b1`** e **`b2`** têm pelo menos um número natural (podemos denotar por **`n1`**, resp. **`n2`**, o número de números naturais incluídos na expressão binária **`b1`**, resp. **`b2)`**.

A hipótese de indução garante que **`n1 ≥ 1`** e **`n2 ≥ 1`**.

Assim, as expressões binárias **`b`**, formadas por **`b1`** e **`b2`** (ou seja **`b1 + b2, b1 - b2, b1 * b2`** e **`b1 / b2`**) têm um número de números inteiros igual a **`n1 + n2 ≥ 1`**.

Indução Matemática

Propriedade: Qualquer fracção contínua f tem um valor entre 0 e 1, i.e. $0 \leq f \leq 1$

- Podemos demonstrar de seguida esta propriedade por indução:.

Passo Base:

Sendo **0** a fracção contínua "mais simples" verifica-se trivialmente o resultado

$$0 \leq 0 \leq 1$$

Passo de Indução:

Assumindo-se a hipótese de indução para uma fração **f** arbitrária, isto é $0 \leq f \leq 1$, deve demonstrar-se que este resultado também se verifica para os elementos "seguintes" de **f**, isto é, os da forma $f^* = 1/(n+f)$ em que **n** é um inteiro (não nulo).

Ora tendo em conta a hipótese de indução $0 \leq f \leq 1$ temos

$$1/(n+f) \leq 1/(1+0) \leq 1 \text{ pois } f \geq 0 \text{ e } n \geq 1$$

$$1/(n+f) \geq 1/(\infty+1) \geq 0 \text{ pois } f \leq 1 \text{ e } n \leq \infty$$

e portanto a propriedade é garantida para todo o f*.

Indução Matemática

- Por vezes a demostração de uma certa propriedade tem de ser feita através de uma propriedade "*mais forte*". demonstração por indução desta propriedade das fracções contínuas pode ser feita da seguinte forma (paradoxo de indução), como exemplificado de seguida

Propriedade: Nenhuma expressão binária inclui dois operadores (sinais) consecutivos.

Neste caso a hipótese de indução não nos vale. Mesmo assumindo que duas expressões binárias **`b1`** e **`b2`** não contêm dois sinais seguidos, o resultado não se pode garantir para a expressão **`b1 + b2`** (ou obtida com os outros operadores).

Com efeito, se **`b1`** terminar num operador ou se **`b2`** começar por um operador então a expressão **`b1 + b2`** teria dois operadores seguidos.

Assim sendo, vamos demonstrar duas propriedades mais fortes que a anterior

Propriedade: Nenhuma expressão binária **começa** por um operador.

Propriedade: Nenhuma expressão binária **termina** por um operador.

- Demonstraremos de seguida a primeira destas propriedades (a segunda é idêntica)

Indução Matemática

Propriedade: Nenhuma expressão binária começa por operador.

Passo Base:

As expressões binárias mais simples, constituídas por números naturais, não começam obviamente por operadores (não têm nenhum).

Passo Indução:

Assuma-se a hipótese de indução, isto é que **`b1`** e **`b2`** não começam por operadores.

Mas então a expressão **`b1 + b2`**, que começa da mesma forma de **`b1`** também não começa por operador.

- o mesmo se pode dizer das expressões **`b1 – b2`**, **`b1 * b2`** e **`b1 / b2`**, o que conclui a demonstração.

- Da mesma forma se demonstraria que as expressões binárias não terminam por operadores.
- Podemos agora demonstrar a propriedade inicial.

Indução Matemática

Propriedade: Nenhuma expressão binária inclui dois operadores (sinais) consecutivos.

Passo Base:

As expressões binárias mais simples, constituídas por números naturais, não incluem dois operadores consecutivos (na realidade, não têm nenhum operador).

Passo Indução:

Assuma-se a hipótese de indução, isto é que **`b1`** e **`b2`** são expressões binárias. Neste caso, a hipótese de indução garante que no interior de **`b1`** e de **`b2`** não ocorrem dois operadores consecutivos.

Mas como se viu, nem **`b1`** termina num operador, nem **`b2`** começa por um.

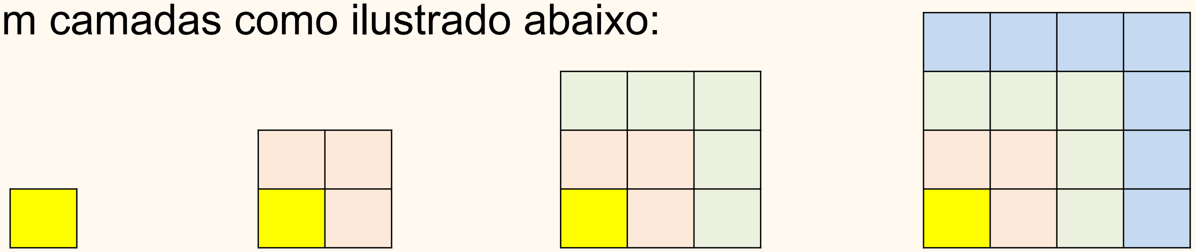
Assim, na expressão binária **`b1 + b2`**, o operador de adição não se segue a, nem é seguido por, outro operador.

Fica assim garantida a não existência de dois operadores consecutivos em **`b1 + b2`**.

Idêntica garantia seria obtida para as expressões **`b1 – b2, b1 * b2`** e **`b1 / b2`**, o que conclui a demonstração.

Indução Matemática

- Apesar de o método de indução ser geral e aplicável a qualquer conjunto inditivo, ele é particularmente útil para o conjunto dos números inteiros, como ilustrado de seguida.
- Aproveitamos estes exemplos para fazer notar que o método de indução matemática não é um método "construtivo", isto é, ele não serve para obter as propriedades desejadas, mas apenas para demonstrar a correcção de propriedades suspeitadas.
- A forma como estas propriedades são "adivinhadas" é um tema interessante para o estudo da criatividade, mas não é relevante para a demonstração.
- Por exemplo, podemos obter a área de quadrados com lado inteiro através da sua formação em camadas como ilustrado abaixo:



1   1+3   1+3+5   1+3+5+7

- O padrão observado sugere que a soma dos primeiros **n** números ímpares é igual à área de um quadrado de lado **n**.
- Mas será que este **resultado é válido para todo o n**?

Indução Matemática

- Podemos então demonstrar por indução o resultado assim sugerido pela geometria.

Propriedade: A soma dos primeiros n números ímpares é igual a n^2.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

Passo Base:

Para n = 1 a propriedade verifica-se pois $2\times 1-1 =.1^2$

Passo Indução:

Assumindo-se a hipótese de indução para um número natural n,

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

pretende demonstrar-se que a propriedade é válida para o número natural "seguinte", isto é

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=(n+1)^2$$

Indução Matemática

Passo de Indução:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$$

- Ora

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = [\ 1+3+5+\ldots+2(n-1)\ ] + 2((n+1)-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + 2n+1$$ agrupando as primeiras parcelas

$$= n^2 + 2n + 1$$ usando a hipótese de indução

$$= (n+1)^2$$ simplificando

o que demonstra o resultado pretendido.

Indução Matemática

- Um outro resultado interessante é a soma de uma progressão geométrica com **n** termos, de razão **r,** começada por 1

$$S(n,r) = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1}$$

- Apesar de não ser muito óbvio qual o resultado desta soma, ela pode obter-se informalmente tendo em atenção que

$$r \cdot S(n,r) = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} + r^n$$

$$S(n,r) = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1}$$

- Subtraindo-se as duas somas, eliminando-se os termos comuns a ambas obtém-se

$$r \cdot S(n,r) - S(n,r) = r^n - 1$$

que após simplificação permite obter o valor da soma $S(n,r) = \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$

Este resultado, obtido "informalmente" pode agora ser demonstrado por indução para qualquer número **n** de termos

Indução Matemática

Propriedade: A soma S(n,r) de uma série geométrica com **n** termos de razão **r** (≠ 1) começada por 1 é dada por

$$S(n,r) = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Passo Base:

Para n = 1* a propriedade verifica-se pois $S(1,r) = \frac{r^1 - 1}{r - 1} = 1$

Passo Indução: $S(n,r) = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \Rightarrow \quad S(n+1,r) = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$

- Ora

$$S(n+1,r) = [1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1}] + r^n$$

$$= S(n,r) + r^n$$

$$= \frac{r^n - 1}{r - 1} + r^n = \frac{r^n - 1 + r^{n+1} - r^n}{r - 1} = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

o que demonstra o resultado pretendido

* Mais rigorosamente deveríamos começar com n = 2 para evitar a indeterminação.