

# Lógica Computacional

---

- O sistema  $\mathcal{R}$  para a Lógica de Predicados
- Refutações no sistema  $\mathcal{R}$
- Composição de Substituições
- Análise da Contradição: Respostas a Questões

# Resolução na Lógica de Predicados

---

- Uma vez definidas as extensões necessárias em relação ao caso proposicional, podemos agora apresentar a extensão do sistema  $\mathcal{R}_p$  para a Lógica de Predicados.

## Sistema de Resolução $\mathcal{R}$

O Sistema de Resolução  $\mathcal{R}$  tem as seguintes características:

1. Demonstrações através de **Refutações**: Para demonstrar uma fórmula  $\varphi$  a partir de um conjunto de premissas  $\Phi$ , demonstra-se que o conjunto  $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$  é insatisfazível. Isto é, que a partir de  $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$  pode demonstrar-se o absurdo / **cláusula vazia**.
2. Todas as fórmulas utilizadas são cláusulas, ou seja disjunções obtidas a partir da forma CNF das matrizes de fórmulas **Prenex Skolemizadas**.
3. A única regra de inferência utilizada é a resolução, requerendo esta que os literais resolvidos sejam **unificados**.

# Resolução na Lógica de Predicados

---

**Exemplo 1:** Se todos os dodecaedros são grandes e estão à frente do objecto **a**, e se existe um objecto que não está à frente de nenhum objecto, então existe um objecto que não é um dodecaedro.

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{F1} & \forall \mathbf{x} \ (\text{Dodec}(\mathbf{x}) \rightarrow (\text{Large}(\mathbf{x}) \wedge \text{FrontOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a}))) \\ \mathbf{F2} & \exists \mathbf{x} \ \forall \mathbf{y} \ \neg \text{FrontOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \hline \mathbf{F3} & \exists \mathbf{x} \ \neg \text{Dodec}(\mathbf{x}) \end{array} \quad \mathcal{R}$$

- Para demonstrar este argumento no sistema  $\mathcal{R}$  há que transformar as premissas e a negação da conclusão para a forma clausal. A fórmula **F1** requer os seguintes passos de transformação, originando as cláusulas **C1** e **C2**.

$$\mathbf{F1.} \ \forall \mathbf{x} \ (\text{Dodec}(\mathbf{x}) \rightarrow (\text{Large}(\mathbf{x}) \wedge \text{FrontOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a})))$$

$$\rightarrow \forall \mathbf{x} \ (\neg \text{Dodec}(\mathbf{x}) \vee (\text{Large}(\mathbf{x}) \wedge \text{FrontOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a})))$$

$$\rightarrow \forall \mathbf{x} \ ((\neg \text{Dodec}(\mathbf{x}) \vee \text{Large}(\mathbf{x})) \wedge (\neg \text{Dodec}(\mathbf{x}) \vee \text{FrontOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a})))$$

$$\rightarrow \forall \mathbf{x1} \ ((\neg \text{Dodec}(\mathbf{x1}) \vee \text{Large}(\mathbf{x1})) \wedge \\ \forall \mathbf{x2} \ (\neg \text{Dodec}(\mathbf{x2}) \vee \text{FrontOf}(\mathbf{x2}, \mathbf{a})))$$

$$\rightarrow \mathbf{C1.} \ \neg \text{Dodec}(\mathbf{x1}) \vee \text{Large}(\mathbf{x1})$$

$$\mathbf{C2.} \ \neg \text{Dodec}(\mathbf{x2}) \vee \text{FrontOf}(\mathbf{x2}, \mathbf{a})$$

# Resolução na Lógica de Predicados

---

## Exemplo 1 (cont):

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{F1} & \forall \mathbf{x} (\text{Dodec}(\mathbf{x}) \rightarrow (\text{Large}(\mathbf{x}) \wedge \text{FrontOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a}))) \\ \mathbf{F2} & \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \neg \text{FrontOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \hline \mathbf{F3} & \exists \mathbf{x} \neg \text{Dodec}(\mathbf{x}) \end{array} \quad \mathcal{R}$$

- A fórmula **F2** apenas requer a skolemização da variável **x**, devendo a constante de Skolem ser diferente da constante **a** já referida na fórmula **F1**.

$$\begin{array}{l} \mathbf{F2.} \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \neg \text{FrontOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \rightarrow \mathbf{C3.} \neg \text{FrontOf}(\mathbf{c}, \mathbf{x3}) \end{array}$$

- Finalmente a negação da conclusão substitui o quantificador existencial e evita a skolemização.

$$\begin{array}{l} \mathbf{F3.} \neg \exists \mathbf{x} \neg \text{Dodec}(\mathbf{x}) \\ \rightarrow \forall \mathbf{x} \neg \neg \text{Dodec}(\mathbf{x}) \\ \rightarrow \mathbf{C4.} \text{Dodec}(\mathbf{x4}) \end{array}$$

# Resolução na Lógica de Predicados

## Exemplo 1 (cont):

|    |  |  |
|----|--|--|
| F1 |  | $\forall x \text{ (Dodec}(x) \rightarrow (\text{Large}(x) \wedge \text{FrontOf}(x, a)))$ |
| F2 |  | $\exists x \forall y \neg \text{FrontOf}(x, y)$  |
| F3 |  | $\exists x \neg \text{Dodec}(x)$   |

$\mathcal{R}$

- Uma vez obtida a forma clausal, pode passar-se à demonstração por refutação.

|     |  |  |
|-----|--|--|
| C1. |  | $\neg \text{Dodec}(x1) \vee \text{Large}(x1)$      |
| C2. |  | $\neg \text{Dodec}(x2) \vee \text{FrontOf}(x2, a)$ |
| C3. |  | $\neg \text{FrontOf}(c, x3)$                       |
| C4. |  | $\text{Dodec}(x4)$                                 |
| C5. |  | $\text{FrontOf}(x4, a)$ Res 4,2 {x2/x4}            |
| C6. |  | $\square$ Res 5,3 {x4/c, x3/a}                     |

- No final pode concluir-se a existência de um não-dodecaedro (**x4**). De facto, se todos os objectos **x4** fossem dodecaedros, o sistema de cláusulas **C1-C4** seria inconsistente. Especificamente, é possível instanciar **x4** a um dodecaedro para obter a inconsistência, pelo que se conclui que essa instância de **x4** não é um dodecaedro.
- Pelas substituições (**x4/c**), verifica-se que o **não-dodecaedro** é o objecto referido na fórmula **F2**, sem nenhum objecto à sua frente, e que skolemizamos com o nome **c**.

# Resolução na Lógica de Predicados

## Exemplo 1 (cont):

|    |  |  |
|----|--|--|
| F1 |  | $\forall x \text{ (Dodec}(x) \rightarrow (\text{Large}(x) \wedge \text{FrontOf}(x, a)))$ |
| F2 |  | $\exists x \forall y \neg \text{FrontOf}(y, x)$  |
| F3 |  | $\exists x \neg \text{Dodec}(x)$   |
|    |  | ----- $\mathcal{R}$  |

- Mas a unificação das cláusulas C2 e C4 pode ser feita com uma variante

|     |  |  |
|-----|--|--|
| C1. |  | $\neg \text{Dodec}(x1) \vee \text{Large}(x1)$      |
| C2. |  | $\neg \text{Dodec}(x2) \vee \text{FrontOf}(x2, a)$ |
| C3. |  | $\neg \text{FrontOf}(c, x3)$                       |
| C4. |  | $\text{Dodec}(x4)$                                 |
|     |  | -----  |
| C5. |  | $\text{FrontOf}(x2, a)$ Res 4,2 {x4/x2}            |
| C6. |  | $\square$ Res 5,3 {x2/c, x3/a}                     |

- Neste caso, a análise da demonstração mostra que a variável **x4** (o não-dodecaedro) foi inicialmente substituída por **x2** e esta subseqüentemente substituída por **c**.
- Assim coloca-se a necessidade de definir a operação de **composição** de substituições, de forma a “seguir o rasto” das variáveis que vão sendo substituídas ao longo da derivação da cláusula vazia.

# Composição de Substituições

---

- Informalmente, a composição de duas substituições  $\sigma$  e  $\rho$  garante que um termo  $a$  que sejam aplicadas essas substituições em sequência ( $\sigma$  seguida de  $\rho$ ) fica idêntico ao que ficaria se lhe fosse aplicada directamente a sua composição. Mais formalmente,

## Composição de Substituições:

Dadas duas substituições  $\sigma = \{ v_1/\tau_1, \dots, v_m/\tau_m \}$  e  $\rho = \{ \omega_1/\theta_1, \dots, \omega_n/\theta_n \}$  a sua composição, denotada por  $\sigma \circ \rho$ , é obtida substituindo em  $\sigma$  todas as ocorrências de qualquer  $\omega_i$  pelo respectivo  $\theta_i$ , e unindo o conjunto resultante com  $\rho$ .

**Exemplo:** Para  $\sigma = \{ x_1/a, x_2/y_1, x_3/f(y_2) \}$  e  $\rho = \{ y_1/b, y_2/y_3 \}$  temos

$$\begin{aligned}\sigma \circ \rho &= \{ x_1/a, x_2/y_1, x_3/f(y_2) \} \circ \{ y_1/b, y_2/y_3 \} \\ &= \{ x_1/a, x_2/b, x_3/f(y_3) \} \cup \{ y_1/b, y_2/y_3 \} \\ &= \{ x_1/a, x_2/b, x_3/f(y_3), y_1/b, y_2/y_3 \}\end{aligned}$$

- Aplicando as substituições  $\sigma$  e  $\rho$  em sequência ao termo  $\mathbf{T}$ :  $P(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$   
 $P(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \sigma = P(a, y_1, f(y_2), y_1, y_2, y_3)$  e  
 $P(a, y_1, f(y_2), y_1, y_2, y_3) \rho = P(a, b, f(y_3), b, y_3, y_3)$

claramente o resultado de aplicar directamente a substituição  $\sigma \circ \rho$  ao termo  $\mathbf{T}$ .

# Composição de Substituições

---

## Exemplo 1 (cont):

C1.  $\neg \text{Dodec}(x1) \vee \text{Large}(x1)$

C2.  $\neg \text{Dodec}(x2) \vee \text{FrontOf}(x2, a)$

C3.  $\neg \text{FrontOf}(c, x3)$

C4.  $\text{Dodec}(x4)$

- Regressando ao exemplo inicial verifica-se que em ambos os casos, a composição das duas substituições feitas conduz ao mesmo resultado – o objecto  $c$  não pode ser um dodecaedro, contrariamente ao admitido na negação da conclusão. No primeiro caso,

C5.  $\text{FrontOf}(x4, a)$       Res 4,2  $\{x2/x4\}$

C6.  $\square$       Res 5,3  $\{x4/c, x3/a\}$

por composição das substituições obtém-se

$$\{x2/x4\} \circ \{x4/c, x3/a\} = \{x2/c\} \cup \{x4/c, x3/a\} = \{x2/c, x3/a, x4/c\}$$

- No segundo caso,

C5.  $\text{FrontOf}(x2, a)$       Res 4,2  $\{x4/x2\}$

C6.  $\square$       Res 5,3  $\{x2/c, x3/a\}$

obtemos

$$\{x4/x2\} \circ \{x2/c, x3/a\} = \{x4/c\} \cup \{x2/c, x3/a\} = \{x2/c, x3/a, x4/c\}$$



# Factorização de Cláusulas

---

- Antes de apresentar outros exemplos existe ainda uma situação que precisa de ser analisada.
- Até agora as substituições eram usadas para permitir unificar literais complementares de **duas** cláusulas que seriam resolvidas após aplicação de um unificador mais geral.
- O próximo exemplo mostra que (raramente) pode ser necessário aplicar resolução **numa só** cláusula.
- Mais especificamente, isto pode ser necessário para **factorizar** ocorrências distintas, mas unificáveis, de um literal na mesma cláusula.

## Exemplo 2: Paradoxo do Barbeiro

Este problema pode ser ilustrado com o “Paradoxo do Barbeiro”:

Numa aldeia existe um barbeiro que barbeia todas as pessoas que não se barbeiam a si próprios, e apenas essas pessoas.

em que se pretende provar, por contradição, que não existe tal barbeiro, isto é pretende demonstrar-se que se pode obter a contradição a partir da (negação da) fórmula

$$\{ \} \models \neg \exists x (B(x) \wedge \forall y (\neg B(y, y) \leftrightarrow B(x, y)))$$

# Factorização de Cláusulas

**Exemplo 2 (cont):** Passando a fórmula para a forma clausal obtemos as cláusulas

$$F1. \exists x \forall y (B(x) \wedge (\neg B(y, y) \leftrightarrow B(x, y)))$$

$$\rightarrow \exists x \forall y (B(x) \wedge (B(y, y) \vee B(x, y)) \wedge (\neg B(y, y) \vee \neg B(x, y)))$$

$$\rightarrow \forall y (B(b) \wedge (B(y, y) \vee B(b, y)) \wedge (\neg B(y, y) \vee \neg B(b, y)))$$

$$\rightarrow B(b) \wedge \forall y (B(y, y) \vee B(b, y)) \wedge \forall y (\neg B(y, y) \vee \neg B(b, y))$$

$$\rightarrow C1. B(b)$$

$$C2. B(y1, y1) \vee B(b, y1)$$

$$C3. \neg B(y2, y2) \vee \neg B(b, y2)$$

- Mas agora somos confrontados com um problema. Para resolver as cláusulas C2 e C3. eliminamos um literal positivo de C1 e um negativo de C2 e obtemos uma cláusula com um literal positivo e outro negativo, que sendo uma tautologia não nos pode conduzir à cláusula vazia. O exemplo abaixo mostra as 4 possíveis resolventes de C2 e C3

$$C2. B(y1, y1) \vee B(b, y1)$$

$$C3. \neg B(y2, y2) \vee \neg B(b, y2)$$

$$C4a. B(b, y2) \vee \neg B(b, y2) \quad \text{Res } 2(1), 3(1) \{y1/y2\}$$

$$C4b. B(b, b) \vee \neg B(b, b) \quad \text{Res } 2(1), 3(2) \{y1/b, y2/b\}$$

$$C4c. B(b, b) \vee \neg B(b, b) \quad \text{Res } 2(2), 3(1) \{y1/b, y2/b\}$$

$$C4d. B(b, y2) \vee \neg B(b, y2) \quad \text{Res } 2(2), 3(2) \{y1/y2\}$$

# Factorização de Cláusulas

---

## Exemplo 2 (cont):

- Para ultrapassar este problema deveremos **factorizar** os literais das cláusulas, isto é aplicar-lhes um unificador mais geral e usar idempotência para eliminar um dos literais repetidos.
- O Paradoxo do Barbeiro pode ser resolvidos como ilustrado de seguida, já que negando a conclusão se obtém a cláusula vazia obtida trivialmente, uma vez factorizadas as cláusulas C2 e c3.

$$\{ \} \mid \neg_{\mathcal{R}} \neg \exists x \forall y (B(x) \wedge (\neg B(y, y) \leftrightarrow B(x, y)))$$

|     |  |               |
|-----|--|---------------|
| C1. | $B(b)$                                 |               |
| C2. | $B(y_1, y_1) \vee B(b, y_1)$           |               |
| C3. | $\neg B(y_2, y_2) \vee \neg B(b, y_2)$ |               |
| C4. | $B(b, b)$                              | Fact 2 {y1/b} |
| C5. | $\neg B(b, b)$                         | Fact 3 {y2/b} |
| C6. | $\square$                              | Res 4, 5      |

- Uma vez abordadas as componentes do sistema  $\mathcal{R}$ , podemos ilustrar o seu funcionamento num conjunto de demonstrações já utilizadas para o sistema  $\mathcal{DN}$ .

# Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

---

**Exemplo 3:**  $\{ \exists x \forall y \text{ NearOf}(x, y) \} \vdash_{\mathcal{R}} \forall y \exists x \text{ NearOf}(x, y)$

- Existindo um objecto “perto” de todos os objectos, então todos os objectos têm algum objecto perto deles.

F1.  $\exists x \forall y \text{ NearOf}(x, y)$

→ C1.  $\text{NearOf}(a, y1)$

F2.  $\neg \forall y \exists x \text{ NearOf}(x, y)$

→  $\exists y \forall x \neg \text{NearOf}(x, y)$

→ C2.  $\neg \text{NearOf}(x2, b)$

- A demonstração exige um único passo de resolução:

C1.  $\text{NearOf}(a, y1)$

C2.  $\neg \text{NearOf}(x2, b)$

C3.  $\square$

Res 1, 2  $\{y1/b, x2/a\}$

# Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

---

**Exemplo 4:**  $\{ \forall y \exists x \text{ NearOf}(x, y) \} \vdash_{\mathcal{R}} \exists x \forall y \text{ NearOf}(x, y)$

- Já a inversa não é verdadeira. Se todos os objectos estão perto de algum objecto, não existe necessariamente um objecto “perto” de todos os objectos.

**F1.**  $\forall y \exists x \text{ NearOf}(x, y)$

→ **C1.**  $\text{NearOf}(f(y1), y1)$

**F2.**  $\neg \exists x \forall y \text{ NearOf}(x, y)$

→  $\forall x \exists y \neg \text{NearOf}(x, y)$

→ **C2.**  $\neg \text{NearOf}(x2, g(x2))$

- Mas agora com a Skolemização das fórmulas, a pseudo-demonstração exigiria que uma variável fosse substituída por um termo contendo essa variável, o que não é permitido numa substituição!

**C1.**  $\text{NearOf}(f(y1), y1)$

**C2.**  $\neg \text{NearOf}(x2, g(x2))$

**C3a.**  $\square \{ x2 / f(g(x2)) \} ???$

**C3b.**  $\square \{ y1 / g(f(y1)) \} ???$

# Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

---

## Exemplo 5:

Sabendo que os dodecaedros estão todos à esquerda do objecto **a** e que os tetraedros estão todos à direita de **a**, então todos os objectos na mesma coluna que **a** são cubos.

- Como vimos anteriormente, a conclusão **C** apenas se torna uma consequência lógica das premissas, se elas incluírem não só as fórmulas **F1** e **F2**, como alguns axiomas de Tarski, nomeadamente **A1**, **A2** e **A3**.

|            |   |
|------------|---|
| <b>F1.</b> | $\forall \mathbf{x} \text{ (Dodec}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{LeftOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a}))$                                  |
| <b>F2.</b> | $\forall \mathbf{x} \text{ (Tet}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{RightOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a}))$                                   |
| <b>A1.</b> | $\forall \mathbf{x} \text{ (Tet}(\mathbf{x}) \vee \text{Cube}(\mathbf{x}) \vee \text{Dodec}(\mathbf{x}))$                           |
| <b>A2.</b> | $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \neg (\text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{LeftOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$  |
| <b>A3.</b> | $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \neg (\text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{RightOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ |
| <b>C</b>   | $\forall \mathbf{x} \text{ (SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \rightarrow \text{Cube}(\mathbf{x}))$                                  |

$\mathcal{R}$

# Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

---

## Exemplo 5 (cont):

- Para demonstrar a conclusão, há que passar para a forma clausal quer as premissas quer a negação da conclusão.

$$F1. \forall x (Dodec(x) \rightarrow LeftOf(x, a))$$

$$\rightarrow C1. \neg Dodec(x1) \vee LeftOf(x1, a)$$

$$F2. \forall x (Tet(x) \rightarrow RightOf(x, a))$$

$$\rightarrow C2. \neg Tet(x2) \vee RightOf(x2, a)$$

$$A1. \forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$$

$$\rightarrow C3. Tet(x3) \vee Cube(x3) \vee Dodec(x3)$$

$$A2. \forall x \forall y \neg (SameCol(x, y) \wedge LeftOf(x, y))$$

$$\rightarrow C4. \neg SameCol(x4, y4) \vee \neg LeftOf(x4, y4)$$

$$A3. \forall x \forall y \neg (SameCol(x, y) \wedge RightOf(x, y))$$

$$\rightarrow C5. \neg SameCol(x5, y5) \vee \neg Right(x5, y5)$$

$$\neg C. \neg \forall x (SameCol(x, a) \rightarrow Cube(x))$$

$$\rightarrow \exists x \neg (\neg SameCol(x, a) \vee Cube(x))$$

$$\rightarrow \exists x (SameCol(x, a) \wedge \neg Cube(x))$$

$$\rightarrow SameCol(c, a) \wedge \neg Cube(c)$$

$$\rightarrow C6. SameCol(c, a)$$

$$C7. \neg Cube(c)$$

# Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

---

## Exemplo 5 (cont):

- Uma vez obtidas as cláusulas pode obter-se a cláusula vazia, por exemplo com a seguinte resolução linear.

|       |  |                      |
|-------|--|----------------------|
| C1.   | $\neg \text{Dodec}(x1) \vee \text{LeftOf}(x1, a)$              |                      |
| C2.   | $\neg \text{Tet}(x2) \vee \text{RightOf}(x2, a)$               |                      |
| C3.   | $\text{Tet}(x3) \vee \text{Cube}(x3) \vee \text{Dodec}(x3)$    |                      |
| C4.   | $\neg \text{SameCol}(x4, y4) \vee \neg \text{LeftOf}(x4, y4)$  |                      |
| C5.   | $\neg \text{SameCol}(x5, y5) \vee \neg \text{RightOf}(x5, y5)$ |                      |
| C6.   | $\text{SameCol}(c, a)$   |                      |
| C7.   | $\neg \text{Cube}(c)$  |                      |
| <hr/> |  |                      |
| C8.   | $\text{Tet}(c) \vee \text{Dodec}(c)$                           | Res 7,3 {x3/c}       |
| C9.   | $\text{RightOf}(c, a) \vee \text{Dodec}(c)$                    | Res 8,2 {x2/c}       |
| C10.  | $\neg \text{SameCol}(c, a) \vee \text{Dodec}(c)$               | Res 9,5 {x5/c, y5/a} |
| C11.  | $\text{Dodec}(c)$  | Res 10,6 { }         |
| C12.  | $\text{LeftOf}(c, a)$  | Res 11,1 {x1/c}      |
| C13.  | $\neg \text{SameCol}(c, a)$                                    | Res 12,4 { }         |
| C14.  | $\square$  | Res 13,6 { }         |



# Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

---

## Exemplo 6:

Sabendo que:

- a) Qualquer objecto ao lado de um cubo é mais pequeno (que o cubo);
- b) Qualquer dodecaedro tem um cubo junto a si; e
- c) A relação “junto de” é simétrica (axioma de Tarski);

então pode concluir-se que para qualquer dodecaedro existe um objecto maior do que ele (o dodecaedro).

$$\begin{array}{l|l} \text{F1.} & \forall \mathbf{x} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\text{Adjoins}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \rightarrow \text{Larger}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) \\ \text{F2.} & \forall \mathbf{x} (\text{Dodec}(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{y} (\text{Cube}(\mathbf{y}) \wedge \text{Adjoins}(\mathbf{y}, \mathbf{x}))) \\ \text{A1.} & \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\text{Adjoins}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \text{Adjoins}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \\ \hline \text{C.} & \forall \mathbf{x} (\text{Dodec}(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{y} \text{Larger}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \end{array} \quad \mathcal{R}$$

Como anteriormente passemos as premissas e a negação da conclusão para a forma clausal.

**Nota:** Por contradição deveremos encontrar um dodecaedro que não tem nenhum objecto maior que ele!

# Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

---

## Exemplo 6 (cont):

F1.  $\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \forall y (\text{Adjoins}(x,y) \rightarrow \text{Larger}(x,y)))$

→  $\forall x (\neg \text{Cube}(x) \vee \forall y (\neg \text{Adjoins}(x,y) \vee \text{Larger}(x,y)))$

→  $\forall x \forall y (\neg \text{Cube}(x) \vee \neg \text{Adjoins}(x,y) \vee \text{Larger}(x,y))$

→ **C1.  $\neg \text{Cube}(x1) \vee \neg \text{Adjoins}(x1,y1) \vee \text{Larger}(x1,y1)$**

F2.  $\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \exists y (\text{Cube}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y)))$

→  $\forall x \exists y (\neg \text{Dodec}(x) \vee (\text{Cube}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y)))$

→ **C2.  $\neg \text{Dodec}(x2) \vee \text{Cube}(c(x2))$**

→ **C3.  $\neg \text{Dodec}(x3) \vee \text{Adjoins}(x3,c(x3))$**

A1.  $\forall x \forall y (\text{Adjoins}(x,y) \rightarrow \text{Adjoins}(y,x))$

→ **C4.  $\neg \text{Adjoins}(x4,y4) \vee \text{Adjoins}(y4,x4)$**

$\neg$ C.  $\neg \forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \exists y \text{Larger}(y,x))$

→  $\neg \forall x \exists y (\neg \text{Dodec}(x) \vee \text{Larger}(y,x))$

→  $\exists x \forall y (\text{Dodec}(x) \wedge \neg \text{Larger}(y,x))$

→  $\forall y (\text{Dodec}(a) \wedge \neg \text{Larger}(y,a))$

→ **C5.  $\text{Dodec}(a)$**

→ **C6.  $\neg \text{Larger}(y6,a)$**  % Nota: O **dodec a** não tem nenhum objecto maior que ele?

# Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

## Exemplo 6 (cont):

- Uma vez obtidas as cláusulas pode obter-se a cláusula vazia.

C1.  $\neg \text{Cube}(x1) \vee \neg \text{Adjoins}(x1, y1) \vee \text{Larger}(x1, y1)$

C2.  $\neg \text{Dodec}(x2) \vee \text{Cube}(c(x2))$

C3.  $\neg \text{Dodec}(x3) \vee \text{Adjoins}(x3, c(x3))$

C4.  $\neg \text{Adjoins}(x4, y4) \vee \text{Adjoins}(y4, x4)$

C5.  $\text{Dodec}(a)$

C6.  $\neg \text{Larger}(y6, a)$

---

C7.  $\neg \text{Cube}(x1) \vee \neg \text{Adjoins}(x1, a)$  Res 6, 1  $\{y6/x1, y1/a\}$

C8.  $\neg \text{Dodec}(x2) \vee \neg \text{Adjoins}(c(x2), a)$  Res 7, 2  $\{x1/c(x2)\}$

C9.  $\neg \text{Adjoins}(c(a), a)$  Res 8, 5  $\{x2/a\}$

C10.  $\neg \text{Adjoins}(a, c(a))$  Res 9, 4  $\{x4/a, y4/c(a)\}$

C11.  $\neg \text{Dodec}(a)$  Res 10, 3  $\{x3/a\}$

C12.  $\square$  Res 11, 6  $\{ \}$

- **Nota:** O objecto  $y6 = x1 = c(x2) = c(a)$ , isto é o cubo que está junto ao **dodecaedro a**, é o objecto que é **maior que a** (o não ser maior conduziu à contradição).

# Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

---

## Exemplo 7:

Sabendo que:

- a) Todo o cubo que tem um objecto ao seu lado é pequeno;
- b) Existem um dodecaedro e um cubo ao lado um do outro;
- c) A relação “junto de” é simétrica (axioma de Tarski);

então pode concluir-se que existe um objecto pequeno.

|     |   |               |
|-----|---|---------------|
| F1. | $\forall \mathbf{x} ((\text{Cube}(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{y} \text{ Adjoins}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) \rightarrow \text{Small}(\mathbf{x}))$ |               |
| F2. | $\exists \mathbf{x} (\text{Dodec}(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{y} (\text{Cube}(\mathbf{y}) \wedge \text{Adjoins}(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$       |               |
| A1. | $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\text{Adjoins}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \text{Adjoins}(\mathbf{y}, \mathbf{x}))$                     |               |
| C.  | $\exists \mathbf{x} \text{ Small}(\mathbf{x})$  | $\mathcal{R}$ |

Como anteriormente passemos as premissas e a negação da conclusão para a forma clausal.

**Nota:** Por contradição deveremos encontrar um objecto que não é pequeno. Qual?.

# Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

---

## Exemplo 7 (cont):

F1.  $\forall x ((\text{Cube}(x) \wedge \exists y \text{Adjoins}(y,x)) \rightarrow \text{Small}(x))$

→  $\forall x (\neg(\text{Cube}(x) \wedge \exists y \text{Adjoins}(y,x)) \vee \text{Small}(x))$

→  $\forall x (\neg\text{Cube}(x) \vee \neg \exists y \text{Adjoins}(y,x) \vee \text{Small}(x))$

→  $\forall x (\neg\text{Cube}(x) \vee \forall y \neg\text{Adjoins}(y,x) \vee \text{Small}(x))$

→  $\forall x \forall y (\neg\text{Cube}(x) \vee \neg\text{Adjoins}(y,x) \vee \text{Small}(x))$

→ C1.  $\neg\text{Cube}(x) \vee \neg\text{Adjoins}(y,x) \vee \text{Small}(x)$

F2.  $\exists x (\text{Dodec}(x) \wedge \exists y (\text{Cube}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y)))$

→  $\exists x \exists y (\text{Dodec}(x) \wedge (\text{Cube}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y)))$

→ C2.  $\text{Dodec}(d)$

→ C3.  $\text{Cube}(c)$

→ C4.  $\text{Adjoins}(d,c)$

A1.  $\forall x \forall y (\text{Adjoins}(x,y) \rightarrow \text{Adjoins}(y,x))$

→ C5.  $\neg\text{Adjoins}(x_5,y_5) \vee \text{Adjoins}(y_5,x_5)$

$\neg$ C.  $\neg \exists x \text{Small}(x)$

→  $\forall x \neg\text{Small}(x)$

→ C6.  $\neg\text{Small}(x_6)$

# Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

---

## Exemplo 7 (cont):

- Uma vez obtidas as cláusulas pode obter-se a cláusula vazia.

|      |   |                        |
|------|---|------------------------|
| C1.  | $\neg\text{Cube}(x1) \vee \neg\text{Adjoins}(y1, x1) \vee \text{Small}(x1)$ |                        |
| C2.  | $\text{Dodec}(d)$   |                        |
| C3.  | $\text{Cube}(c)$  |                        |
| C4.  | $\text{Adjoins}(c, d)$  |                        |
| C5.  | $\neg\text{Adjoins}(x5, y5) \vee \text{Adjoins}(y5, x5)$                    |                        |
| C6.  | $\neg\text{Small}(x6)$  |                        |
| C7.  | $\neg\text{Cube}(x1) \vee \neg\text{Adjoins}(y1, x1)$                       | Res 6, 1 {x6/x1}       |
| C8.  | $\neg\text{Adjoins}(y1, c)$   | Res 7, 3 {x1/c}        |
| C9.  | $\neg\text{Adjoins}(c, y1)$   | Res 8, 5 {x5/c, y5/y1} |
| C10. | $\square$   | Res 9, 5 {y1/d}        |

- **Nota:** Similarmente ao caso anterior,  $x6 = x1 = c$ , isto é, o cubo que está junto ao **dodecaedro d**, é o objecto que **é pequeno** (o facto de não o ser, conduziu à cláusula vazia / contradição).