Lógica Computacional

- A Resolução como Regra de Inferência
- O Sistema de Dedução $\mathcal{R}_P$
- Coerência e Completude do Sistema $\mathcal{R}_P$

Resolução

- O algoritmo **Horn-SAT** é coerente e completo no sentido que decide deterministicamente se um conjunto **S** de cláusulas de **Horn** é satisfazível. Além disso é bastante eficiente, sendo polinomial no número de cláusulas.

- Como vimos, demonstrar que uma fórmula é uma consequência tautológica de um conjunto de premissas, corresponde a provar, **por absurdo**, que o conjunto de fórmulas obtido pelas premissas e a negação da conclusão é insatisfazível.

- Assim o algoritmo **Horn-SAT** permite demonstrar fórmulas e partir de premissas, ...

mas ***apenas*** se a representação na forma CNF conduzir a cláusulas Horn.

No caso geral, a forma CNF inclui várias cláusulas *não-Horn* e o algoritmo determinista Horn-SAT não pode ser aplicado.

Para o caso geral pode usar-se o sistema $\mathcal{R}$ de resolução que utiliza apenas uma regra de inferência – a resolução.

Antes de definir essa regra convém relembrar os conceitos e terminologia utilizados.

Regra de Resolução

Cláusula: Uma cláusula é uma disjunção de literais.

Literal: Um literal é um átomo (fórmula atómica) ou a sua negação.

Exemplo: A cláusula $\neg A \lor B \lor \neg C$ tem 1 literal positivo (B) e dois negativos ($\neg A$ e $\neg C$)

Regra de Resolução:

- A partir de duas cláusulas C_1 e C_2 em que uma contem um literal positivo **L** e outra o literal negativo **¬L**, pode inferir-se outra cláusula, denominada **resolvente**, composta por todos os literais de C_1 e de C_2 , excepto **L** e **¬L**.

Exemplo: As cláusulas

$$\neg A \lor B \lor \neg C \qquad \text{e} \qquad \neg A \lor C \lor D$$

podem ser resolvidas em ordem a C obtendo-se a cláusula resolvente

$$\neg A \lor B \lor \neg A \lor D$$

que se pode simplificar para

$$\neg A \lor B \lor D$$

Nota: Um cláusula pode ser definida como um conjunto de literais, o que torna “automática” a sua simplificação, isto é

$$\neg A \lor B \lor \neg A \lor D \equiv \{\neg A,\ B,\ D\}$$

Coerência da Resolução

Teorema : A regra de resolução é **coerente**

- Este teorema declara que para todas as interpretações em que as cláusulas resolvidas sejam verdadeiras a resolvente também o é.

- A sua demonstração é imediata. Considerem-se as duas cláusulas

$$\mathbf{A} \vee \varphi \qquad \text{e} \qquad \neg\mathbf{A} \vee \psi$$

  em que φ e ψ são cláusulas arbitrárias. Ora o átomo A ou é verdadeiro ou é falso. Logo,

  - Se A fôr verdadeiro então ψ também é verdadeira.
  - Se A for falso, então φ tem de ser verdadeira.

- Desta forma ou φ ou ψ são verdadeiras e portanto a cláusula $\varphi \vee \psi$ é verdadeira, ficando assim demonstrada a coerência da regra da resolução.

Sistema de Resolução $\mathcal{R}$

Sistema de Resolução $\mathcal{R}_P$

- Sistema de Resolução $\mathcal{R}_P$ (proposicional) tem as seguintes características:

1. Deduz uma fórmula φ de premissas Φ ($\Phi \vdash \varphi$) por **absurdo**, isto é demonstra que o conjunto $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfazível, deduzindo a contradição $\perp$ a partir do conjunto de fórmulas $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$.
2. Todas as fórmulas utilizadas são cláusulas, ou seja disjunções de literais, se necessário convertendo as fórmulas $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ na forma CNF.
3. A única regra de inferência utilizada é a resolução .

Nota: No contexto do sistema $\mathcal{R}$, a contradição $\perp$ é obtida através de uma **cláusula vazia**. De facto, $\perp$ obtém-se de duas cláusulas **A** e **¬A**, e portanto a cláusula resolvente é **vazia**, isto é, não contem nenhuns literais. Esta **cláusula vazia**, é geralmente denotada pelo símbolo $\Box$.

Resolução

- Alguns exemplos simples permitem perceber que a regra de resolução permite implementar algumas regras de inferência conhecidas

Modus Ponens: $\{A \to B,\ A\} \vdash_{\mathcal{R}} B$

1.	$\neg A \lor B$		
2.	A		
3.	$\neg B$		
4.	$\neg A$	Res 1, 3	
5.	$\square$	Res 2, 4	

Modus Tolens: $\{A \to B,\ \neg B\} \vdash_{\mathcal{R}} \neg A$

1.	$\neg A \lor B$	
2.	$\neg B$	
3.	A	
4.	B	Res 1, 3
5.	$\square$	Res 2, 4

Raciocínio Hipotético : $\{A \to B,\ B \to C\} \vdash_{\mathcal{R}} A \to C$

1.	$\neg A \lor B$	
2.	$\neg B \lor C$	
3.	A	
4.	$\neg C$	
5.	B	Res 1, 3
6.	C	Res 2, 5
7.	$\square$	Res 4, 6

Resolução Linear

- De notar que a regra de resolução não permite resolver duas cláusulas em mais do que um literal. Caso contrário a regra não seria coerente.

- O exemplo abaixo ilustra claramente a situação

$$\{A \leftrightarrow \neg B\} \mid\!-_{\mathcal{R}} C \text{ ???}$$

1.	$\neg A \vee \neg B$	
2.	$A \vee B$	
3.	$\neg C$	
4.	$\square$	Res 1, 2 ???

- Podemos agora ilustrar o funcionamento do sistema de Resolução com um exemplo mais complexo

Sistema de Resolução

Exemplo: $\{\neg(B\vee C) \leftrightarrow (A\wedge D)),\ A \rightarrow B,\ \neg A\vee D\} \vdash_{\mathcal{R}} \neg A$

Passo 1: Criar as cláusulas a partir das premissas e negação da conclusão.

$\neg(B\vee C) \leftrightarrow (A\wedge D)) \Leftrightarrow$

$((B\vee C)\vee(A\wedge D)) \wedge (\neg(A\wedge D)\vee \neg(B\vee C)) \Leftrightarrow$

$(B\vee C\vee A) \wedge (B\vee C\vee D) \wedge (\neg A\vee\neg D)\vee (\neg B \wedge\neg C)) \Leftrightarrow$

$(B\vee C\vee A) \wedge (B\vee C\vee D) \wedge (\neg A\vee\neg D\vee\neg B) \wedge (\neg A\vee\neg D\vee\neg C) \Leftrightarrow$

$(A\vee B\vee C) \wedge (B\vee C\vee D) \wedge (\neg A\vee\neg B\vee\neg D) \wedge (\neg A\vee\neg C\vee\neg D)$

- Ficamos pois com as cláusulas

$A \vee B \vee C$

$B \vee C \vee D$

$\neg A \vee \neg B \vee \neg D$

$\neg A \vee \neg C \vee \neg D$

para além das cláusulas correspondentes às outras premissas

$\neg A \vee B$

$\neg A \vee D$

e da cláusula correspondente á negação da conclusão

A

Sistema de Resolução

- Uma vez obtidas as cláusulas, pode fazer-se a demonstração por resolução.

1.	$A \lor B \lor C$		
2.	$B \lor C \lor D$		
3.	$\neg A \lor \neg B \lor \neg D$		
4.	$\neg A \lor \neg C \lor \neg D$		
5.	$\neg A \lor B$		
6.	$\neg A \lor D$		
7.	A		
8.	D	Res	6, 7
9.	$\neg A \lor \neg D$	Res	3, 5
10.	$\neg D$	Res	7, 9
11.	$\square$	Res	8, 10

$$\dfrac{\dfrac{\neg A \lor D \qquad A}{D}\,8 \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A \lor \neg B \lor \neg D \qquad \neg A \lor B}{\neg A \lor \neg D}\,9 \qquad A}{\neg D}\,10}{\square}\,11$$

- De notar que esta demonstração não é única.
- Além disso, não segue uma heurística óbvia para escolher em cada passo as cláusulas a resolver, obrigando a uma visão global de todas as cláusulas para decidir o que fazer.
- No entanto existe uma estratégia de resolução, a **resolução linear**, que limita as escolhas a fazer e permite uma implementação computacional mais adequada.

Resolução Linear

- Na **resolução linear**, uma das cláusulas a resolver é a **última** obtida. Por exemplo,

1.	$A \lor B \lor C$		
2.	$B \lor C \lor D$		
3.	$\neg A \lor \neg B \lor \neg D$		
4.	$\neg A \lor \neg C \lor \neg D$		
5.	$\neg A \lor B$		
6.	$\neg A \lor D$		
7.	A		
8.	B	Res	7, 5
9.	$\neg A \lor \neg D$	Res	8, 3
10.	$\neg A$	Res	9, 6
11.	$\square$	Res	10, 7

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \qquad \neg A \lor B}{B}\,8 \qquad A \lor \neg B \lor \neg D}{\neg A \lor \neg D}\,9 \qquad \neg A \lor D}{\neg A}\,10 \qquad A}{\square}\,11$$

- Nota: Pode haver mais de uma demonstração linear.

8.	D	Res	7, 6
9.	$\neg A \lor \neg B$	Res	8, 3
10.	$\neg B$	Res	9, 7
11.	$\neg A$	Res	10, 5
11.	$\square$	Res	11, 7

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \qquad \neg A \lor D}{D}\,8 \qquad \neg A \lor \neg B \lor \neg D}{\neg A \lor \neg B}\,9 \qquad A}{\neg B}\,10 \qquad \neg A \lor B}{\neg A}\,11 \qquad A}{\square}\,12$$

Completude e Coerência do Sistema $\mathcal{R}_P$

- Como observado no exemplo, existem normalmente várias possíveis sequências de demonstração da cláusulas vazia.
- Nos exemplos conseguimos sempre obter a cláusula vazia sempre que as cláusulas iniciais fossem contraditórias. No entanto coloca-se a questão de saber se isto é sempre possível, isto é se o sistema $\mathcal{R}_P$ é completo. Esta questão é resolvida pelo seguinte

Teorema: O sistema $\mathcal{R}_P$ é coerente e completo.

A demonstração de que o sistema $\mathcal{R}_P$ é coerente é imediata. A única regra utilizada é a regra da resolução e vimos atrás que a regra é coerente.

A demonstração de que $\mathcal{R}_P$ é completo pode ser feita por indução, no número de átomos existentes no conjunto S de cláusulas insatisfazível (contraditórias).

Passo Base: Se **S** só contem um literal e é insatisfazível, então a cláusula vazia é obtida por resolução.

- Para ser insatisfazível, **S** tem de ser {**A , ¬A**} pelo que resolvendo as duas cláusulas se obtém a cláusula vazia.

Completude e Coerência do Sistema $\mathcal{R}$

Passo de Indução: Se se obtém a cláusula vazia por resolução num conjunto insatisfazível de cláusulas $\mathbf{S_n}$ com **n** átomos distintos, então a cláusula vazia também se obtém por resolução dum conjunto insatisfazível, $\mathbf{S_{n+1}}$, com **n+1** átomos distintos.

A demonstração desta cláusula faz-se obtendo uma cobertura de $\mathbf{S_{n+1}}$ por dois conjuntos de cláusulas $\mathbf{X_1}$ e $\mathbf{X_2}$, ou seja por conjuntos tais que $\mathbf{X_1} \cup \mathbf{X_2} = \mathbf{S_{n+1}}$ e demonstrando que

i. existe um conjunto $\mathbf{X_0} \subseteq \mathbf{S_n}$, com **n** átomos distintos, que é insatisfazível; ou

ii. aplicando resolução a $\mathbf{X_1}$ / $\mathbf{X_2}$ se podem obter cláusulas constituídas exclusivamente pelos átomos $\mathbf{A_{n+1}}$ / $\neg\mathbf{A_{n+1}}$.

Uma vez demonstrados estes pressupostos, é fácil de ver que aplicando resolução ao conjunto $\mathbf{S_{n+1}}$ se pode obter a cláusula vazia. Com efeito,

i. Neste caso, pela hipótese de indução, a cláusula vazia é obtida, pois o conjunto $\mathbf{X_0} \subseteq \mathbf{S_n}$ só contem **n** átomos distintos:

ii. Neste caso, juntam-se as duas demonstrações onde se obtêm as cláusulas $\mathbf{A_{n+1}}$ a partir de $\mathbf{X_1}$ e $\neg\mathbf{A_{n+1}}$ a partir de $\mathbf{X_2}$, resolvendo-se essas clausulas entre si, assim se obtendo a cláusula vazia.

Completude e Coerência do Sistema $\mathcal{R}$

Demonstremos agora os pressupostos anteriores. Os conjuntos $\mathbf{X_1}$ e $\mathbf{X_2}$ que constituem uma cobertura de $\mathbf{S_{n+1}}$ são construídos da seguinte forma:

- $\mathbf{X^+}$ é composto por todas as cláusulas que contêm o literal $\mathbf{A_{n+1}}$;
- $\mathbf{X^-}$ é composto por todas as cláusulas que contêm o literal $\neg \mathbf{A_{n+1}}$;
- $\mathbf{X_0}$ é composto por todas as cláusulas que não contêm os literais $\mathbf{A_{n+1}}$ e $\neg \mathbf{A_{n+1}}$.
- $\mathbf{X_1} = \mathbf{X^+} \cup \mathbf{X_0}$ e $\mathbf{X_2} = \mathbf{X^-} \cup \mathbf{X_0}$

Exemplo (em que **C** é o átomo $\mathbf{A_{n+1}}$)

$\mathbf{S_3} = \{A \vee B,\ A \vee C,\ A \vee \neg B \vee \neg C,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

$\mathbf{X^+} = \{A \vee C\}$;

$\mathbf{X^-} = \{A \vee \neg B \vee \neg C\}$;

$\mathbf{X_0} = \{A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$;

$\mathbf{X_1} = \{A \vee C,\ A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

$\mathbf{X_2} = \{A \vee \neg B \vee \neg C,\ A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

Exemplo:

$S_3 = \{A \vee B,\ A \vee C,\ A \vee \neg B \vee \neg C,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

$X^+ = \{A \vee C\}$;

$X^- = \{A \vee \neg B \vee \neg C\}$;

$X_0 = \{A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$;

$X_1 = \{A \vee C,\ A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

$X_2 = \{A \vee \neg B \vee \neg C,\ A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

Naturalmente, se o conjunto $\mathbf{X_0}$ for insatisfazível, quer $\mathbf{X_1}$ quer $\mathbf{X_2}$ são insatisfazíveis. Mas neste caso, como $\mathbf{X_0}$ tem apenas **n** átomos, pela hipótese de indução a cláusula vazia pode ser obtida.

No exemplo acima, o conjunto $\mathbf{X_0}$ não é insatisfazível. Com efeito ele é satisfeito para a interpretação **{** A **= F** , B **= V }**.

Neste exemplo, deveremos então provar que de $\mathbf{X_1}$ se obtem a cláusula C e de $\mathbf{X_2}$ se obtem a cláusula $\neg C$, pelo que resolvendo-as se obtem a cláusula vazia.

Completetude e Coerência do Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo:

$S_3 = \{A \vee B,\ A \vee C,\ A \vee \neg B \vee \neg C,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

$X^+ = \{A \vee C\}$;

$X^- = \{A \vee \neg B \vee \neg C\}$;

$X_0 = \{A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$;

$X_1 = \{A \vee C,\ A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

$X_2 = \{A \vee \neg B \vee \neg C,\ A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

Sendo $\mathbf{S_{n+1}}$ insatisfazível e quando, como é o caso, o conjunto $\mathbf{X_0}$ não é insatisfazível, então

- a atribuição do valor ***V*** a $\mathbf{A_{n+1}}$ (**C = V** no exemplo), torna $\mathbf{X_2}$ insatisfazível; e
- a atribuição do valor **F** a $\mathbf{A_{n+1}}$ (**C = F** no exemplo), torna $\mathbf{X_1}$ insatisfazível.

De facto,

- se **C = V**, as cláusulas de $\mathbf{X^+}$ tornam-se todas ***Verdade*** e como $\mathbf{X_0}$ não é insatisfazível, então a insatisfazíbilidade de $\mathbf{S_{n+1}}$ terá de ocorrer no conjunto $\mathbf{X_2}$, e
- se **C = F**, as cláusulas de $\mathbf{X^-}$ tornam-se todas ***Verdade*** e como $\mathbf{X_0}$ não é insatisfazível, então a insatisfazíbilidade de $\mathbf{S_{n+1}}$ terá de ocorrer no conjunto $\mathbf{X_1}$.

Completude e Coerência do Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo:

$S_3 = \{A \vee B,\ A \vee C,\ A \vee \neg B \vee \neg C,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

$X^+ = \{A \vee C\}$;

$X^- = \{A \vee \neg B \vee \neg C\}$;

$X^0 = \{A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$;

$X_1 = \{A \vee C,\ A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

$X_2 = \{A \vee \neg B \vee \neg C,\ A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

- Consideremos os conjuntos $\mathbf{Y_1}$ / $\mathbf{Y_2}$ resultantes de se apagarem os literais $\mathbf{A_{n+1}}$ / $\mathbf{\neg A_{n+1}}$ das cláusulas de $\mathbf{X_1}$ / $\mathbf{X_2}$. No exemplo, (em que **C** é o $\mathbf{A_{n+1}}$) teríamos

  $Y_1 = \{A \vee C,\ A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

  $Y_2 = \{A \vee \neg B \vee \neg C,\ A \vee B,\ \neg A \vee B,\ \neg A \vee \neg B\}$

- Se assumimos $\mathbf{A_{n+1} = V}$ então $\mathbf{\neg A_{n+1}}$ = **F,** e o valor de verdade das cláusulas de $\mathbf{Y_2}$ não se altera em relação a $\mathbf{X_2}$; logo se $\mathbf{X_2}$ é insatisfazível, $\mathbf{Y_2}$ também o é.

- Se assumimos $\mathbf{A_{n+1} = F}$ então o valor de verdade das cláusulas de $\mathbf{Y_1}$ não se altera em relação a $\mathbf{X_1}$; logo se $\mathbf{X_1}$ é insatisfazível$\mathbf{Y_1}$ também o é.

Completude e Coerência do Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo:

$S_3 = \{A \lor B,\ A \lor C,\ A \lor \neg B \lor \neg C,\ \neg A \lor B,\ \neg A \lor \neg B\}$

...

$X_1 = \{A \lor C,\ A \lor B,\ \neg A \lor B,\ \neg A \lor \neg B\}$

$X_2 = \{A \lor \neg B \lor \neg C,\ A \lor B,\ \neg A \lor B,\ \neg A \lor \neg B\}$

$Y_1 = \{A \lor C,\ A \lor B,\ \neg A \lor B,\ \neg A \lor \neg B\}$

$Y_2 = \{A \lor \neg B \lor \neg C,\ A \lor B,\ \neg A \lor B,\ \neg A \lor \neg B\}$

- Mas como $\mathbf{Y_1}$ / $\mathbf{Y_2}$ contêm apenas **n** literais (os literais $\mathbf{A_{n+1}}$ e $\mathbf{\neg A_{n+1}}$ foram apagados de $\mathbf{X_1}$ / $\mathbf{X_2}$) a hipótese de indução garante que de ambos os conjuntos $\mathbf{Y_1}$ / $\mathbf{Y_2}$ se pode obter, por resolução, a cláusula vazia.

- Mas se nas demonstrações utilizadas substituirmos as cláusulas de $\mathbf{Y_1}$ / $\mathbf{Y_2}$ pelas correspondentes de $\mathbf{X_1}$ / $\mathbf{X_2}$ o que obteremos são os literais $\mathbf{A_{n+1}}$ e $\mathbf{\neg A_{n+1}}$, pois serão usadas cláusulas que os contêm e eles não podem ser resolvidos com os literais complementares.

Completude e Coerência do Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo:

- O raciocínio anterior pode ser ilustrado com o conjunto insatisfazível

$$S_3 = \{A \lor B,\ A \lor C,\ A \lor \neg B \lor \neg C,\ \neg A \lor B,\ \neg A \lor \neg B\}$$

a partir do qual se construiram os conjuntos

$$X_1 = \{A \lor C,\ A \lor B,\ \neg A \lor B,\ \neg A \lor \neg B\}$$

$$X_2 = \{A \lor \neg B \lor \neg C,\ A \lor B,\ \neg A \lor B,\ \neg A \lor \neg B\}$$

- No exemplo podem demonstrar-se a cláusula **C** a partir de X_1 e a cláusula **¬C** de X_2.

1.	$A \lor C$	
2.	$A \lor B$	
3.	$\neg A \lor B$	
4.	$\neg A \lor \neg B$	
5.	$\neg A$	Res 4, 3
6.	C	Res 5, 1

1.	$A \lor \neg B \lor \neg C$	
2.	$A \lor B$	
3.	$\neg A \lor B$	
4.	$\neg A \lor \neg B$	
5.	$\neg A$	Res 4, 3
6.	$\neg B \lor \neg C$	Res 5, 1
7.	$A \lor \neg C$	Res 6, 2
8.	$\neg C$	Res 7, 5

- Como ambas as demonstrações são feitas com subconjuntos de cláusulas de $\mathbf{S_{n+1}}$, elas podem ser feitas a partir do conjunto $\mathbf{S_{n+1}}$, assim se obtendo (de $\mathbf{S_{n+1}}$) as cláusulas $\mathbf{A_{n+1}}$ e $\mathbf{\neg A_{n+1}}$ *que, resolvidas, originam a cláusula vazia*, como se pretendia demonstrar.

Completude e Coerência do Sistema $\mathcal{R}$

- **Exemplo:**

$S_3 = \{A \lor B,\ A \lor C,\ A \lor \neg B \lor \neg C,\ \neg A \lor B,\ \neg A \lor \neg B\}$

0.	$A \lor C$	
1.	$A \lor \neg B \lor \neg C$	
2.	$A \lor B$	
3.	$\neg A \lor B$	
4.	$\neg A \lor \neg B$	
5.	$\neg A$	Res 4, 3
6.	C	Res 5, 0
7.	$\neg A$	Res 4, 3
8.	$\neg B \lor \neg C$	Res 7, 1
9.	$A \lor \neg C$	Res 8, 2
10.	$\neg C$	Res 9, 5
11.	$\square$	Res 10,6

1.	$A \lor C$	
2.	$A \lor B$	
3.	$\neg A \lor B$	
4.	$\neg A \lor \neg B$	
5.	$\neg A$	Res 4, 3
6.	C	Res 5, 1

1.	$A \lor \neg B \lor \neg C$	
2.	$A \lor B$	
3.	$\neg A \lor B$	
4.	$\neg A \lor \neg B$	
5.	$\neg A$	Res 4, 3
6.	$\neg B \lor \neg C$	Res 5, 1
7.	$A \lor \neg C$	Res 6, 2
8.	$\neg C$	Res 7, 5