

Lógica Computacional

Axiomas do Mundo dos Blocos

Algumas Inferências Analíticas

Consistência e completude do sistema DN

Axiomas do Mundo dos Blocos

- A linguagem do mundo dos blocos que temos utilizado, chamemos-lhe Tarski, foi definida com os seguintes símbolos funcionais e predicativos:

$$\text{Tarski} = \langle \text{SF}, \text{SP} \rangle$$

- $\text{SF} = \text{SF}_0$

- Constantes: nomes que se podem dar a blocos

- $\text{SF}_0 = \{a, b, c, d, \dots\}$

- $\text{SP} = \text{SP}_1 \cup \text{SP}_2 \cup \text{SP}_3$

Predicados Unários: Propriedades de tamanho e tipo dos blocos.

- $\text{SP}_1 = \{ \text{Cube}, \text{Tet}, \text{Dodec}, \text{Small}, \text{Medium}, \text{Large} \}$

- Predicados Binários: Igualdade e Relações de tamanho, tipo, posição entre blocos

- $\text{SP}_2 = \{ =, \text{Larger}, \text{Smaller}, \text{SameSize}, \text{SameShape}, \text{FrontOf}, \text{BackOf}, \text{SameRow}, \text{LeftOf}, \text{RightOf}, \text{SameCol}, \text{Adjoins} \}$

- Predicados Ternários: Bloco entre 2 blocos (os 3 blocos alinhados)

- $\text{SP}_3 = \{ \text{Between} \},$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Se a semântica associada aos predicados for axiomatizada, as inferências correspondentes a consequências analíticas passam a ser consequências lógicas das premissas e dos axiomas de Tarski.

Axiomas de Forma

- Exclusividade: Não pode haver um bloco com duas formas diferentes

$$\begin{aligned} &\neg \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Tet}(x)) \\ &\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Dodec}(x)) \\ &\neg \exists x (\text{Dodec}(x) \wedge \text{Cube}(x)) \end{aligned}$$

- Exaustividade : Apenas existem os três tipos de blocos

$$\forall x (\text{Tet}(x) \vee \text{Dodec}(x) \vee \text{Cube}(x))$$

- Na linguagem Traski, existe um outro predicado, **SameShape/2**, que tem de ser relacionado com este predicados unários.

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Introdução de **SameShape/2**

$$\forall x \forall y ((\text{Tet}(x) \wedge \text{Tet}(y)) \rightarrow \text{SameShape}(x, y))$$

$$\forall x \forall y ((\text{Cube}(x) \wedge \text{Cube}(y)) \rightarrow \text{SameShape}(x, y))$$

$$\forall x \forall y ((\text{Dodec}(x) \wedge \text{Dodec}(y)) \rightarrow \text{SameShape}(x, y))$$

- Eliminação de **SameShape/2**

$$\forall x \forall y ((\text{SameShape}(x, y) \wedge \text{Tet}(x)) \rightarrow \text{Tet}(y))$$

$$\forall x \forall y ((\text{SameShape}(x, y) \wedge \text{Cube}(x)) \rightarrow \text{Cube}(y))$$

$$\forall x \forall y ((\text{SameShape}(x, y) \wedge \text{Dodec}(x)) \rightarrow \text{Dodec}(y))$$

- O predicado **SameShape/2** corresponde a uma relação de equivalência, gozando das propriedades *reflexivas, simétrica e transitiva*

$$\forall x \quad \text{SameShape}(x, x)$$

$$\forall x \forall y (\text{SameShape}(x, y) \rightarrow \text{SameShape}(y, x))$$

$$\forall x \forall y \forall z ((\text{SameShape}(x, y) \wedge \text{SameShape}(y, z)) \rightarrow \text{SameShape}(x, z))$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Axiomas semelhantes podem ser definidos para os tamanhos dos cubos.

Axiomas de Tamanho

- Exclusividade: Não pode haver um bloco com duas tamanhos diferentes

$$\begin{aligned} &\neg \exists x \text{ (Small}(x) \wedge \text{Medium}(x)) \\ &\neg \exists x \text{ (Small}(x) \wedge \text{Large}(x)) \\ &\neg \exists x \text{ (Medium}(x) \wedge \text{Large}(x)) \end{aligned}$$

- Exaustividade : Apenas existem os três tipos de tamanhos

$$\forall x \text{ (Small}(x) \vee \text{Medium}(x) \vee \text{Large}(x))$$

- Na linguagem Tarski, existe um outro predicado, **SameSize/2**, que tem de ser relacionado com estes predicados unários.

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Introdução de **SameSize/2**

$$\forall x \forall y ((\text{Small}(x) \wedge \text{Small}(y)) \rightarrow \text{SameSize}(x,y))$$

$$\forall x \forall y ((\text{Medium}(x) \wedge \text{Medium}(y)) \rightarrow \text{SameSize}(x,y))$$

$$\forall x \forall y ((\text{Large}(x) \wedge \text{Large}(y)) \rightarrow \text{SameSize}(x,y))$$

- Eliminação de **SameSize/2**

$$\forall x \forall y ((\text{SameSize}(x,y) \wedge \text{Small}(x)) \rightarrow \text{Small}(y))$$

$$\forall x \forall y ((\text{SameSize}(x,y) \wedge \text{Medium}(x)) \rightarrow \text{Medium}(y))$$

$$\forall x \forall y ((\text{SameSize}(x,y) \wedge \text{Large}(x)) \rightarrow \text{Large}(y))$$

- Tal como o predicado SameShape/2, também o predicado **SameShape/2** corresponde a uma relação de equivalência, gozando das propriedades *reflexivas*, *simétrica* e *transitiva*

$$\forall x \quad \text{SameSize}(x,x)$$

$$\forall x \forall y (\text{SameSize}(x,y) \rightarrow \text{SameSize}(y,x))$$

$$\forall x \forall y \forall z ((\text{SameSize}(x,y) \wedge \text{SameSize}(y,z)) \rightarrow \text{SameSize}(x,z))$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- No caso dos tamanhos há que considerar igualmente a ordenação dos tamanhos expressa na relação Larger/2 (e Smaller/2).
- Introdução de **Larger/2**

$$\begin{aligned}\forall x \forall y ((\text{Medium}(x) \wedge \text{Small}(y)) \rightarrow \text{Larger}(x,y)) \\ \forall x \forall y ((\text{Large}(x) \wedge \text{Small}(y)) \rightarrow \text{Larger}(x,y)) \\ \forall x \forall y ((\text{Large}(x) \wedge \text{Medium}(y)) \rightarrow \text{Larger}(x,y))\end{aligned}$$

- Eliminação de **Larger/2**

$$\begin{aligned}\forall x \forall y ((\text{Larger}(x,y) \rightarrow ((\text{Large}(x) \wedge \text{Medium}(y)) \\ \vee (\text{Large}(x) \wedge \text{Small}(y)) \\ \vee (\text{Medium}(x) \wedge \text{Small}(y)))))\end{aligned}$$

- Equivalência de Larger/2 e Smaller/2

$$\forall x \forall y ((\text{Larger}(x,y) \leftrightarrow \text{Smaller}(y,x)))$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Para os predicados de posição há que considerar as relações de equivalência estabelecidas pelos predicados **SameRow/2** e **SameCol/2**, com as suas propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

$$\forall x \quad \text{SameRow}(x, x)$$

$$\forall x \forall y \quad (\text{SameRow}(x, y) \rightarrow \text{SameRow}(y, x))$$

$$\forall x \forall y \quad ((\text{SameRow}(x, y) \wedge \text{SameRow}(y, z)) \rightarrow \text{SameRow}(x, z))$$

$$\forall x \quad \text{SameCol}(x, x)$$

$$\forall x \forall y \quad (\text{SameCol}(x, y) \rightarrow \text{SameCol}(y, x))$$

$$\forall x \forall y \quad ((\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{SameCol}(y, z)) \rightarrow \text{SameCol}(x, z))$$

- Adicionalmente há que estabelecer que dois objectos diferentes não podem ocupar a mesma posição

$$\forall x \forall y \quad ((\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{SameRow}(x, y)) \leftrightarrow x = y)$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Os predicados **FrontOf/2**, **BackOf/2** e **SameRow/2** gozam das seguintes propriedades:

- Exclusividade

$$\neg \exists x \exists y \text{ (BackOf (x, y) } \wedge \text{ SameRow (x, y))}$$

$$\neg \exists x \exists y \text{ (BackOf (x, y) } \wedge \text{ FrontOf (x, y))}$$

$$\neg \exists x \exists y \text{ (SameRow (x, y) } \wedge \text{ FrontOf (x, y))}$$

- Exaustividade:

$$\forall x \forall y \text{ (BackOf (x, y) } \vee \text{ SameRow (x, y) } \vee \text{ FrontOf (x, y))}$$

- O predicados **BackOf/2** goza da propriedade *transitiva*.

$$\forall x \forall y \forall z \text{ ((BackOf (x, y) } \wedge \text{ BackOf (y, z)) } \rightarrow \text{ BackOf (x, z))}$$

- O predicado **FrontOf/2** é equivalente ao predicado **BackOf/2** com os argumentos trocados.

$$\forall x \forall y \text{ (FrontOf (x, y) } \leftrightarrow \text{ BackOf (y, x))}$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Os predicados **RightOf/2**, **LeftOf/2** e **SameCol/2** têm propriedades semelhantes.
- Exclusividade

$$\begin{aligned} &\neg \exists x \exists y \text{ (LeftOf}(x, y) \wedge \text{SameCol}(x, y)) \\ &\neg \exists x \exists y \text{ (LeftOf}(x, y) \wedge \text{RightOf}(x, y)) \\ &\neg \exists x \exists y \text{ (SameCol}(x, y) \wedge \text{RightOf}(x, y)) \end{aligned}$$

- Exaustividade:

$$\forall x \forall y \text{ (LeftOf}(x, y) \vee \text{SameCol}(x, y) \vee \text{RightOf}(x, y))$$

- O predicados **LeftOf/2** goza da propriedade *transitiva*.

$$\forall x \forall y \forall z \text{ ((LeftOf}(x, y) \wedge \text{LeftOf}(y, z)) \rightarrow \text{LeftOf}(x, z))$$

- O predicado **RightOf/2** é equivalente ao predicado **LeftOf/2** com os argumentos trocados.

$$\forall x \forall y \text{ (RightOf}(x, y) \leftrightarrow \text{LeftOf}(y, x))$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Os predicados **Adjoins/2** e **Between/3** requerem uma representação mais completa sobre o número da linha e da coluna em que se encontra cada objecto.
- Apenas se apresenta abaixo um axioma definidor do predicado **Adjoins/2**

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \text{ (Adjoins}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leftrightarrow$$
$$\text{ ((row}(\mathbf{x}) = \text{row}(\mathbf{y}) \wedge \text{col}(\mathbf{x}) = \text{col}(\mathbf{y}) + 1) \vee$$
$$\text{ (row}(\mathbf{x}) = \text{row}(\mathbf{y}) \wedge \text{col}(\mathbf{x}) + 1 = \text{col}(\mathbf{y})) \vee$$
$$\text{ (row}(\mathbf{x}) = \text{row}(\mathbf{y}) + 1 \wedge \text{col}(\mathbf{x}) = \text{col}(\mathbf{y})) \vee$$
$$\text{ (row}(\mathbf{x}) + 1 = \text{row}(\mathbf{y}) \wedge \text{col}(\mathbf{x}) = \text{col}(\mathbf{y}))))$$

- Esta definição pressupõe que a linguagem Tarski seja estendida, nomeadamente com símbolos funcionais
 - SF_0 - A constante 1
 - SF_1 - Os símbolos funcionais **row/1** e **col/1**.
 - SF_2 - O símbolo funcional **+/2**

para além de alguma axiomatização da aritmética (propriedades da soma)

Demonstrações "Analíticas"

- A partir dos axiomas do Mundo de Blocos podem deduzir-se logicamente algumas propriedades que anteriormente apenas se poderiam obter analiticamente.
- Por exemplo:

`{ Larger(a,b) , Medium(b) } |-DN Large(a)`

`{ Tet(a) , Cube(b) } |-DN a ≠ b`

`{ Larger(a,b) , Larger(b,c) } |-DN Large(a)`

`{ Larger(a,b) , Larger(b,c) } |-DN Medium(b)`

`{ Adjoins(a,b) , LeftOf(a,b) } |-DN SameRow(a,b)`

`{ Between(a,b,c) , LeftOf(a,b) } |-DN RightOf(a,c)`

No entanto estas demonstrações são bastante "entediantes" como se pode ver no primeiro caso (os outros ficam para exercício)

Demonstrações "Analíticas"

Exemplo: $\{ \text{Larger}(a,b) , \text{Medium}(b) \} \models_{\text{DN}} \text{Large}(a)$
 $(\text{Larger}(a,b) \wedge \text{Medium}(b)) \rightarrow \text{Large}(a)$

| | | | |
|-----|--|---|--------------|
| 1. | $\text{Larger}(a,b) \wedge \text{Medium}(b)$ | Elim \forall: Axioma | & |
| 2. | $\text{Larger}(a,b)$ | Elim \rightarrow : 2, Axioma' | |
| 3. | $(\text{Large}(a) \wedge \text{Medium}(b)) \vee (\text{Medium}(a) \wedge \text{Small}(b)) \vee (\text{Large}(a) \wedge \text{Small}(b))$ | | |
| 4. | $\text{Large}(a) \wedge \text{Medium}(b)$ | | |
| 5. | $\text{Large}(a)$ | | |
| 6. | $\text{Medium}(a) \wedge \text{Small}(b)$ | | |
| 7. | $\text{Small}(b)$ | | |
| 8. | $\text{Medium}(b)$ | | |
| 9. | $\exists x (\text{Small}(x) \wedge \text{Medium}(x))$ | Intr \exists : " 7 & 8 " | |
| 10. | \perp | Intr \perp : 9, Axioma | |
| 11. | $\text{Large}(a)$ | Elim \perp : 10 | |
| 12. | $\text{Large}(a) \wedge \text{Small}(b)$ | | |
| 13. | $\text{Large}(a)$ | | |
| 14. | $\text{Large}(a)$ | Elim \vee : 3, 4-5, 6-11, 12-13 | |

Métodos de Demonstração com Quantificadores

Exemplo: Ordem de Quantificadores 1

$$\exists y \forall x \varphi(x, y) \rightarrow \forall x \exists y \varphi(x, y)$$

Se existe um bloco junto a todos os blocos, então todos os blocos têm um bloco junto deles!

| | | |
|----|---|---------------------------|
| 1. | $\exists x \forall y \text{ Adjoins}(x, y)$ | |
| 2. | a: $\forall y \text{ Adjoins}(a, y)$ | |
| 3. | b: | |
| 4: | $\text{Adjoins}(a, b)$ | Elim \forall : 2 |
| 5. | $\exists y \text{ Adjoins}(y, b)$ | Intr \exists : 4 |
| 6. | $\forall x \exists y \text{ Adjoins}(y, x)$ | Intr \forall : 3 - 5 |
| 7. | $\forall x \exists y \text{ Adjoins}(y, x)$ | Elim \exists : 1, 2 - 6 |

- Mas será que existe um bloco “junto a todos os blocos” ?
- Será que esse bloco está junto a si próprio?

Métodos de Demonstração com Quantificadores

Exemplo: Ordem de Quantificadores 2

$$\exists y \forall x \varphi(x, y) \rightarrow \forall x \exists y \varphi(x, y)$$

- O problema não está na demonstração mas sim na premissa que viola os axiomas de posição. A mesma demonstração será válida com um predicado reflexivo, como por exemplo para o predicado `NearOf/2` definido como:

$$\forall x \forall y (\text{NearOf}(x, y) \leftrightarrow (\text{Adjoins}(x, y) \vee x = y))$$

| | | |
|----|---|---------------------------|
| 1. | $\exists x \forall y \text{NearOf}(x, y)$ | |
| 2. | a: $\forall y \text{NearOf}(a, y)$ | |
| 3. | b: | |
| 4. | $\text{NearOf}(a, b)$ | Elim \forall : 2 |
| 5. | $\exists y \text{NearOf}(y, b)$ | Intr \exists : 4 |
| 6. | $\forall x \exists y \text{NearOf}(y, x)$ | Intr \forall : 3 - 5 |
| 7. | $\forall x \exists y \text{NearOf}(y, x)$ | Elim \exists : 1, 2 - 6 |

Métodos de Demonstração com Quantificadores

Exemplo: Ordem de Quantificadores 3

$$\forall x \exists y \varphi(x, y) \rightarrow \exists y \forall x \varphi(x, y) \quad ???$$

Se todos os blocos têm um bloco ao pé de si, será que existe um bloco ao pé de todos os blocos?

- Claramente a resposta é não! E no entanto uma demonstração “errada” consegue provar este resultado.

| | | |
|----|--|---------------------------|
| 1. | $\forall x \exists y \text{ NearOf}(x, y)$ | |
| 2. | $a: \forall x \text{ NearOf}(x, a)$ | |
| 3. | $\exists y \forall x \text{ NearOf}(x, y)$ | Intr \exists : 3 |
| 4. | $\exists y \forall x \text{ NearOf}(x, y)$ | Elim \exists : 1, 2 - 3 |

- O erro está na hipótese utilizada, que atribui um nome a uma variável que está quantificada existencialmente, mas em que o quantificador não é o primeiro da fórmula utilizada!

Métodos de Demonstração com Quantificadores

Exemplo: Paradoxo do Barbeiro

Numa aldeia existe um barbeiro que barbeia todas as pessoas que não se barbeiam a si próprios, e apenas essas pessoas.

- Na realidade não pode existir tal situação como se prova na demonstração seguinte:

| | | |
|-----|---|------------------------------|
| 1. | $\exists x (B(x) \wedge \forall y (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$ | |
| 2. | $b: B(b) \wedge \forall y (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(b,y))$ | |
| 3. | $\forall y (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(b,y))$ | Elim \wedge : 2 |
| 4. | $\neg B(b,b) \leftrightarrow B(b,b)$ | Elim \forall : 3 |
| 5. | $B(b,b)$ | |
| 6. | $\neg B(b,b)$ | Elim \leftrightarrow : 4,5 |
| 7. | \perp | Intr \perp : 4,5 |
| 8. | $\neg B(b,b)$ | Intr \neg : 4,5 |
| 9. | $B(b,b)$ | Elim \leftrightarrow : 4,8 |
| 10. | \perp | Intr \perp : 8,9 |
| 11. | \perp | Elim \exists : 1, 2 - 10 |
| 12. | $\neg \exists x (B(x) \wedge \forall y (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$ | Intr \neg : 1 - 11 |

Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

- O sistema de Dedução Natural **DN** apresentado contém regras de inferência de introdução e eliminação de operadores e quantificadores nomeadamente

| | | | |
|---------------------------|----------------------------|---------------------------------------|--|
| \wedge Conjunção | \neg Negação | \rightarrow Implicação | = Igualdade |
| \vee Disjunção | \perp Contradição | \leftrightarrow Equivalência | \forall Q. Universal |
| | | | \exists Q. Existencial |

- Adicionalmente verificamos que o sistema **T**, correspondendo ao sistema **DN** restrito aos 6 operadores iniciais $\{\wedge, \vee, \neg, \perp, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ é coerente e completo isto é, qualquer fórmula bem formada escrita com esses operadores pode ser demonstrada através das regras do sistema se e apenas se for uma consequência **tautológica** das premissas.

- **Coerência do sistema T:**

- O sistema restrito de dedução natural **T**, é *tautologicamente* coerente.

$$\Phi \vdash_{\mathbf{T}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \models_{\mathbf{T}} \varphi$$

- **Completude do sistema T:**

- O sistema restrito de dedução natural **T**, é *tautologicamente* completo.

$$\Phi \models_{\mathbf{T}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash_{\mathbf{T}} \varphi$$

Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

- As limitações de representação e de regras de demonstração do sistema T garantiam que apenas se poderiam considerar universos (domínios de discurso) finitos.
- Neste contexto, e assumindo que as fórmulas atómicas têm apenas dois valores de verdade possíveis {Verdade, Falso} existem um número finito de valorações para um conjunto de premissas envolvendo n fórmulas atómicas, mais exactamente 2^n .
- Apesar de este número crescer muito rapidamente com n , 2^n é um número finito, e portanto é possível avaliar **em tempo finito** se uma fórmula φ é uma consequência tautológica de um conjunto de premissas Φ .
- No caso do sistema de Dedução Natural DN os pressupostos acima já não são válidos. Em particular, fórmulas quantificadas, mesmo que de tamanho finito, podem referir-se a um conjunto infinito de objectos.
- Por exemplo, as fórmulas abaixo definem o conjunto (infinito) de números inteiros
 - **Integer (0)**
 - **$\forall x (\text{Integer}(x) \rightarrow \exists y (\text{Integer}(y) \wedge \text{suc}(y, x)))$**

Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

- No caso do sistema de Dedução Natural DN os pressupostos acima já não são válidos. Em particular um problema que se coloca é o de saber se será possível verificar em tempo finito se uma fórmula é ou não uma consequência lógica de um conjunto de premissas. “Infelizmente”, tal não é em geral possível.

Teorema da Incompletude (de Gödel)

Qualquer sistema com um poder de expressão pelo menos igual ao necessário para axiomatizar a aritmética **não é decidível**, isto é, existem fórmulas Φ e φ para as quais não é possível determinar, em tempo finito ou infinito, se $\Phi \models \varphi$.

- No entanto, em muitos casos de interesse, esta questão pode ser resolvida em tempo finito (caso contrário, a aritmética não podia ter sido desenvolvida !).
- Nestes casos coloca-se a questão de saber se será possível obter demonstrações finitas de uma fórmula φ a partir de um conjunto de premissas Φ , sendo estas fórmulas todas FBFs de uma linguagem de primeira ordem.

Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

- De facto as propriedades de Coerência e Completude podem ser obtidas para o sistema DN de Dedução Natural, contendo as regras de introdução e de eliminação dos operadores

| | | | |
|---------------------------|----------------------------|---------------------------------------|--|
| \wedge Conjunção | \neg Negação | \rightarrow Implicação | = Igualdade |
| \vee Disjunção | \perp Contradição | \leftrightarrow Equivalência | \forall Q. Universal |
| | | | \exists Q. Existencial |

O sistema **DN** é **coerente** e **completo** isto é, qualquer fórmula bem formada escrita com esses operadores pode ser demonstrada através das regras do sistema se e apenas se for uma consequência **lógica** (FO) das premissas.

Coerência do sistema DN:

- O sistema restrito de dedução natural DN, é coerente logicamente (FO).

$$\Phi \vdash_{\text{DN}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \models_{\text{FO}} \varphi$$

Completude do sistema DN:

- O sistema restrito de dedução natural DN, é completo logicamente (FO).

$$\Phi \models_{\text{FO}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash_{\text{DN}} \varphi$$