

# Lógica Computacional

---

Fórmulas com Múltiplos Quantificadores

Técnicas de Tradução

Fórmulas com Funções

Formas Prenex

# Frases com Múltiplos Quantificadores

---

- Para além da especificação de propriedades de objetos, vistos isoladamente (o seu tamanho ou forma), estamos geralmente interessados nas relações que vários objetos estabelecem entre si.
- Neste caso, e reportando-se as frases a vários objetos genéricos deverão ser usadas variáveis diferentes para objetos diferentes e naturalmente quantificar as fórmulas resultantes para obter frases com significado.

- Os seguintes exemplos, muito simples, podem ser traduzidos de uma forma “directa”

Todos os objetos têm a mesma forma  $\forall x \forall y \text{ SameShape}(x, y)$

Existem objetos com o mesmo tamanho  $\exists x \exists y \text{ SameSize}(x, y)$

- Naturalmente estas fórmulas (e as correspondentes frases) são muito simples. Mas mesmo neste caso há que ter algum cuidado, para com o mapeamento de variáveis a objectos do domínio. Por exemplo, frases semelhantes já não podem ser traduzidas da forma óbvia

Todos os objetos têm formas diferentes  $\forall x \forall y \neg \text{SameShape}(x, y) ?$

Existem objetos do mesmo tamanho  $\exists x \exists y \text{ SameSize}(x, y) ?$

# Frases com Múltiplos Quantificadores

---

Todos os objetos têm formas diferentes

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \neg \text{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

- O **erro** desta tradução é especificar que *um objeto tem uma forma diferente da sua!*
- Com efeito, uma variável pode representar qualquer objeto. Assim sendo, duas variáveis podem ser mapeadas para o mesmo objeto!
- Se um domínio tiver pelo menos um objeto, (por exemplo, **c**), a fórmula acima é sempre falsa, pois não é satisfeita para o par  $\langle \mathbf{x}=\mathbf{c}, \mathbf{y}=\mathbf{c} \rangle$ .
- De facto, a fórmula pode ser considerada uma forma de especificar, de uma forma muito “indirecta” que *não existem objetos no domínio!*
- Para traduzir a frase acima (e a existencial) há que representar o que não está dito mas está implícito linguisticamente, isto é:

Todos os objetos (**distintos**) têm formas diferentes

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \rightarrow \neg \text{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

Existem objetos (**distintos**) com a mesma forma

$$\exists \mathbf{x} \exists \mathbf{y} (\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \wedge \text{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

# Frases com Múltiplos Quantificadores

---

- Com estes cuidados podemos traduzir frases em língua natural para a FBFs com múltiplos quantificadores. Se conveniente, deveremos usar a técnica de rephrasear o enunciado inicial, embora as frases transformadas se tornem muito “artificiais”.
- A generalização das formas aristotélicas para 2 variáveis, ilustram bem este método:

**Exemplo 1:** Todos os cubos são maiores que todos os tetraedros.

**Qualquer** que seja o objeto, **se** ele for um cubo, **então qualquer** que seja um objeto (o mesmo ou outro), **se** este for um tetraedro, **então** aquele é maior que este.

$$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \forall y (\text{Tet}(y) \rightarrow \text{Larger}(x, y)))$$

**Exemplo 2:** Todos os cubos são maiores que alguns tetraedros.

**Qualquer** que seja o objeto, **se** ele for um cubo, **então existe** um objeto (o mesmo ou outro), **que** é um tetraedro **e** aquele é maior que este.

$$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \exists y (\text{Tet}(y) \wedge \text{Larger}(x, y)))$$

# Frases com Múltiplos Quantificadores

---

**Exemplo 3:** Alguns cubos são maiores que todos os tetraedros.

**Existe** um objeto, **que** é um cubo, e **qualquer** que seja o objeto, **se** este for um tetraedro, **então** aquele é maior que este.

$$\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \forall y (\text{Tet}(y) \rightarrow \text{Larger}(x, y)))$$

**Exemplo 4:** Alguns cubos são maiores que alguns tetraedros.

**Existe** um objeto, **que** é um cubo, e **existe** um objeto, **que** é um tetraedro e aquele é maior que este.

$$\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \exists y (\text{Tet}(y) \wedge \text{Larger}(x, y)))$$

- Todos estes exemplos satisfazem as regras de frases aristotélicas: o quantificador universal vem associado a uma implicação e o existencial a uma conjunção.
- De notar que nestas fórmulas não é especificado que  $x \neq y$ . Em rigor **deveria sê-lo** mas tendo em conta os axiomas da exclusividade (um objeto não pode ser um cubo e um tetraedro simultaneamente) a desigualdade explícita é “desnecessária”.

# Frases com Múltiplos Quantificadores

---

Os exemplos seguintes, requerem rephraseados mais complexos.

**Exemplo 5a:** Qualquer cubo azul é grande.

**Qualquer** que seja o objeto, **se** for um cubo e **se for azul**, **então** aquele objeto é grande.

$$\forall \mathbf{x} ( (\text{Cube}(\mathbf{x}) \wedge \text{Blue}(\mathbf{x})) \rightarrow \text{Large}(\mathbf{x}) ) )$$

**Exemplo 5b:** Qualquer cubo que esteja à esquerda de um tetraedro é grande.

**Qualquer** que seja o objeto, **se** for um cubo e **se existir um outro objeto que seja um tetraedro e aquele esteja à esquerda deste**, **então** aquele objeto é grande.

$$\forall \mathbf{x} ( (\text{Cube}(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{y} (\text{Tet}(\mathbf{y}) \wedge \text{LeftOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) \rightarrow \text{Large}(\mathbf{x}) ) )$$

- De notar que a fórmula  $\text{Blue}(\mathbf{x})$  (usada no caso 5a) em que a variável  $x$  ocorre livre, denota um conjunto (**indeterminado**) de objetos ( $\mathbf{x}$ ) com a propriedade “serem azuis”.
- Similarmente, a fórmula  $\exists \mathbf{y} (\text{Tet}(\mathbf{y}) \wedge \text{LeftOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ , usada no caso 5b, em que a variável  $x$  também ocorre livre, denota um conjunto (**indeterminado**) de objetos ( $\mathbf{x}$ ) com a propriedade de “estarem à esquerda de um tetraedro”.

# Frases com Múltiplos Quantificadores

---

- O último exemplo, abaixo, corresponde a uma frase cuja interpretação é algo ambígua. No caso, a interpretação “imediate” sugere um quantificador “errado”.

**Exemplo 6:** Qualquer cubo que esteja à esquerda de **algum** tetraedro também está à sua frente.

- A frase “equivalente” tem uma interpretação mais directa:

**Exemplo 6a:** Qualquer cubo que esteja à esquerda de **um qualquer** tetraedro também está à sua frente.

**Qualquer** que seja um objeto, **se** for um cubo **então qualquer** que seja o objeto, se este for um tetraedro e aquele estiver à esquerda deste, então aquele também estará à frente deste!

$$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \forall y ((\text{Tet}(y) \wedge \text{LeftOf}(x,y)) \rightarrow \text{FrontOf}(x,y)))$$

- Neste caso, a frase inicial sugere um quantificador existencial (**algum** tetraedro). No entanto como se vê pelo frase adaptada, o quantificador que deve ser usado é de facto um quantificador universal !

# Fórmulas com Funções

---

- A existência de símbolos funcionais na assinatura é muitas vezes utilizada para facilitar a representação dos domínios de discurso. Por exemplo a frase “Todas as pessoas amam a sua (delas) mãe” pode ser representada em (pelo menos) duas formas distintas, consoante a assinatura  $\Sigma$  que se adopte (e que se assume que contem o símbolo predicativo **Loves/2**):

1. A assinatura  $\Sigma$  contem um **símbolo predicativo MotherOf/2**

- Neste caso a frase deverá indicar a relação mãe-filho através desse predicado, o que poderá ser traduzida após o seu rephrasear para

**Quaisquer** que sejam duas pessoas, **se** a segunda for mãe da primeira **então** esta ama a primeira.

$$\forall x \forall y \ ( \text{MotherOf} (y, x) \rightarrow \text{Loves} (x, y) )$$

2. A assinatura  $\Sigma$  contem um **símbolo funcional motherOf/1**

- Neste caso a frase poderá ser traduzida de uma forma bastante mais simples,

$$\forall x \ \text{Loves} (x, \text{motherOf} (x) )$$



# Fórmulas com Funções

---

- Há no entanto que ter alguns cuidados na utilização de símbolos funcionais.
- 1. Quando eles coexistem na assinatura com os correspondentes símbolos predicativos, deverá ser garantida a sua correspondência através de uma axioma de **unicidade**.

$$\forall x \forall y (\text{MotherOf}(x, y) \leftrightarrow x = \text{motherOf}(y))$$

- 2. Esta unicidade tem de estar garantida. Por exemplo uma frase semelhante à anterior “Todas as pessoas gostam dos seus filhos” pode ser representada com o predicado ChildOf/2, de forma semelhante à anterior

$$\forall x \forall y ((\text{ChildOf}(x, y) \rightarrow \text{Loves}(y, x))$$

- No entanto, não é possível em geral utilizar um símbolo funcional **childOf/1** para representar a relação pretendida, por esta relação não ser funcional !
- Com efeito, uma pessoa pode ter zero, um ou mais filhos.
- Mas poderia ser usado um símbolo funcional **motherOf/1**, já que “**mãe há só uma**”.

# Prenex - Formas normais

---

- Tal como para as fórmulas FPOs da Lógica Proposicional (sem quantificadores) também as fórmulas bem formadas (FBFs) da lógica de predicados têm uma forma normalizada equivalente – a forma Prenex.
- Nesta forma Prenex a ênfase é na colocação dos predicados à cabeça, o que como vimos não ocorre em geral na conversão de frases em língua natural.
- Como veremos mais tarde, e tal como as formas normais para as FPOs o objectivo da conversão de FBFs para uma forma Prenex tem a ver com o seu tratamento automático que é facilitado por esta normalização, e não para as tornar mais adequadas para o tratamento humano (ou por dedução natural).

## Definição: Forma Prenex

Uma fórmulas bem formadas diz-se na forma **Prenex** se é constituída por uma sequência de quantificadores seguida de uma fórmula em que todas as variáveis ocorrem livres. A sequência de quantificadores é denominada o **Prefixo** e a fórmula sem variáveis ligadas a **Matriz**.

# Normalização de FBFs e Forma Prenex

---

**Exemplo:**  $\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \exists y (\text{Tet}(y) \wedge \text{Larger}(x, y)))$

- A fórmula acima não está na forma Prenex. No entanto a fórmula é equivalente à fórmula seguinte,

$$\exists x \exists y (\text{Cube}(x) \wedge (\text{Tet}(y) \wedge \text{Larger}(x, y)))$$

que está na forma Prenex, com matriz  $(\text{Cube}(x) \wedge (\text{Tet}(y) \wedge \text{Larger}(x, y)))$  e prefixo  $\exists x \exists y$ .

- Neste caso a conversão para a forma Prenex é imediata (quantificação nula: apenas se “deslocou”  $\exists y$ ) mas em geral o processo de conversão é mais complexo, utilizando regras de equivalência já analisadas
  - Equivalências Booleanas
  - Leis de de Morgan para quantificadores
  - Leis de quantificação nula

# Conversão para a Forma Prenex

---

A conversão para a forma Prenex pode seguir os seguintes passos

1. Eliminar os símbolos de implicação e equivalência

$$\begin{aligned}\varphi \rightarrow \psi &\Leftrightarrow_{\text{TT}} \neg \varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\Leftrightarrow_{\text{TT}} (\neg \varphi \vee \psi) \wedge (\neg \psi \vee \varphi)\end{aligned}$$

2. Aplicar as leis de de Morgan até não existirem símbolos de negação a anteceder quantificadores

$$\begin{aligned}\neg \forall \mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) &\Leftrightarrow_{\text{FO}} \exists \mathbf{x} \neg \varphi(\mathbf{x}) \\ \neg \exists \mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) &\Leftrightarrow_{\text{FO}} \forall \mathbf{x} \neg \varphi(\mathbf{x})\end{aligned}$$

3. Passar os quantificadores para o início, usando as regras de quantificação nula.

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{x} (\varphi \wedge \psi(\mathbf{x})) &\Leftrightarrow_{\text{FO}} \varphi \wedge \forall \mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) \\ \exists \mathbf{x} (\varphi \vee \psi(\mathbf{x})) &\Leftrightarrow_{\text{FO}} \varphi \vee \exists \mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) \\ \forall \mathbf{x} (\varphi \vee \psi(\mathbf{x})) &\Leftrightarrow_{\text{FO}} \varphi \wedge \forall \mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) \\ \exists \mathbf{x} (\varphi \wedge \psi(\mathbf{x})) &\Leftrightarrow_{\text{FO}} \varphi \wedge \exists \mathbf{x} \psi(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Neste último caso, ter o cuidado de renomear variáveis com o mesmo símbolo mas ligadas a diferentes quantificadores de forma a garantir que todos os quantificadores utilizem variáveis com nomes diferentes.

# Conversão para a Forma Prenex

---

**Exemplo 1:**  $\exists x (Cube(x) \wedge \exists y (Tet(y) \wedge Larger(x,y)))$

1. Eliminar os símbolos de implicação e equivalência
  2. Aplicar as leis de de Morgan ...
  3. Usar as regras de quantificação para alargar o escopo de  $\exists y$
- Como em **Cube(x)** não ocorre a variável **y** livre o quantificador  $\exists y$  pode quantificá-la.

$$\exists x (\exists y (Cube(x) \wedge (Tet(y) \wedge Larger(x,y))))$$

que está na forma Prenex após a eliminação dos parênteses.

$$\exists x \exists y (Cube(x) \wedge Tet(y) \wedge Larger(x,y))$$

# Conversão para a Forma Prenex

---

**Exemplo 2:**  $\forall \mathbf{x} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{y} (\text{Tet}(\mathbf{y}) \wedge \text{Larger}(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$

1. Eliminar os símbolos de implicação e equivalência

$$\forall \mathbf{x} (\neg \text{Cube}(\mathbf{x}) \vee \exists \mathbf{y} (\text{Tet}(\mathbf{y}) \wedge \text{Larger}(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$$

2. Aplicar as leis de de Morgan ...

3. Usar as regras de quantificação nula para alargar o escopo de  $\exists \mathbf{y}$

$$\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} (\neg \text{Cube}(\mathbf{x}) \vee (\text{Tet}(\mathbf{y}) \wedge \text{Larger}(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$$

- podendo-se recuperar o símbolo de implicação se se quiser.

$$\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \rightarrow (\text{Tet}(\mathbf{y}) \wedge \text{Larger}(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$$

# Conversão para a Forma Prenex

---

- O próximo exemplo permite verificar que duas fórmulas bastante diferentes são de facto equivalentes, originando a mesma forma Prenex.

## Exemplo 3:

3.a Quaisquer que sejam as três pessoas, se a primeira é progenitora da segunda e a segunda da terceira então a primeira é avó da terceira.

$$\forall x \forall y \forall z \left( (\text{Parent}(x, y) \wedge \text{Parent}(y, z)) \rightarrow \text{GrandParent}(x, z) \right)$$

3.b Quaisquer que sejam duas pessoas, a primeira é avó da segunda se existir uma terceira pessoa de que a primeira seja progenitora e que por sua vez seja progenitora da segunda.

$$\forall x \forall y \left( \exists z (\text{Parent}(x, z) \wedge \text{Parent}(z, y)) \rightarrow \text{GrandParent}(x, y) \right)$$

- Esta última formulação não está na forma Prenex, mas vamos convertê-la para essa e compará-la com a primeira que já está na forma Prenex.

# Conversão para a Forma Prenex

---

**3 a:**  $\forall x \forall y \forall z ((\text{Parent}(x, y) \wedge \text{Parent}(y, z)) \rightarrow \text{GrandParent}(x, z))$

**3 b:**  $\forall x \forall y (\exists z (\text{Parent}(x, z) \wedge \text{Parent}(z, y)) \rightarrow \text{GrandParent}(x, y))$

1. Eliminar os símbolos de implicação e equivalência

$$\forall x \forall y (\neg \exists z (\text{Parent}(x, z) \wedge \text{Parent}(z, y)) \vee \text{GrandParent}(x, y))$$

2. Aplicar as leis de de Morgan

$$\forall x \forall y (\forall z \neg (\text{Parent}(x, z) \wedge \text{Parent}(z, y)) \vee \text{GrandParent}(x, y))$$

3. Usar as regras de quantificação nula para alargar o escopo de  $\forall z$

$$\forall x \forall y (\forall z ((\neg (\text{Parent}(x, z) \wedge \text{Parent}(z, y)) \vee \text{GrandParent}(x, y))))$$

- recuperando-se o símbolo de implicação para obter uma FBF em Forma Prenex ue após a eliminação de um parêntesis é idêntica à fórmula 3a, a menos da renomeação das variáveis y e z.

$$\forall x \forall y \forall z ((\text{Parent}(x, z) \wedge \text{Parent}(z, y)) \rightarrow \text{GrandParent}(x, y))$$



# Conversão para a Forma Prenex

---

- O próximo exemplo ilustra a importância de se renomearem variáveis
- **Exemplo 4:**

Existem objetos que são cubos e objetos que são pequenos.

$$\exists x \text{ Cube}(x) \wedge \exists x \text{ Small}(x)$$

1. Eliminar os símbolos de implicação e equivalência
2. Aplicar as leis de de Morgan
3. Usar as regras de quantificação nula para alargar o escopo do segundo quantificador

**Erro:** Sem renomear a 2ª variável, o primeiro quantificador fica redundante, pois na fórmula que quantifica  $\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x))$  a variável  $x$  não ocorre livre.

$$\exists x \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x))$$

**Correcto:** Renomeando-se a 2ª variável, a primeira variável mantém-se livre

$$\begin{aligned} &\exists x \text{ Cube}(x) \wedge \exists y \text{ Small}(y) \\ &\exists x \exists y (\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(y)) \end{aligned}$$

# Ordem dos Quantificadores

---

- Em geral, há que ter em atenção a ordem dos quantificadores consecutivos em FBFs (tal como ocorrem na forma Prenex mas que também podem ocorrer em FBFs que não estejam nessa forma).
- Se os quantificadores são do mesmo tipo essa ordem é irrelevante. Essa situação é manifesta em algumas das frases anteriores como “Quaisquer que sejam duas pessoas ...” ou para frases existenciais do tipo “Existem duas pessoas que ...” correspondendo a fórmulas equivalentes

$$\forall x \forall y \varphi(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x \varphi(x, y)$$

$$\exists x \exists y \psi(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x \psi(x, y)$$

- Já fórmulas com os dois tipos de quantificadores consecutivos não são equivalentes. Por exemplo não são equivalentes as especificações (no mundo dos blocos)
  - “Para qualquer objeto existe outro da mesma forma”.
  - “Existe um objeto que é da mesma forma de qualquer outro”

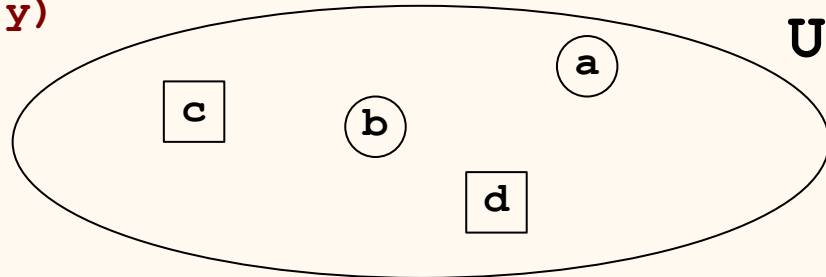
# Ordem dos Quantificadores

- Com efeito as traduções destas frases conduzem às FBFs (já na forma Prenex)
  - “Para qualquer objeto existe um da mesma forma”.

$$\forall x \exists y \text{ SameShape}(x, y)$$

- “Existe um objeto que é da mesma forma de qualquer objeto”

$$\exists y \forall x \text{ SameShape}(x, y)$$



- Com efeito no domínio ao lado:

$\forall x \exists y \text{ SameShape}(x, y)$ : qualquer que seja o objeto  $x$  que se escolha existe um objeto  $y$  que satisfaz a fórmula  $\text{SameShape}(x, y)$  !!!

a  $\rightarrow$  b  
b  $\rightarrow$  a  
c  $\rightarrow$  d  
d  $\rightarrow$  c

$\exists y \forall x \text{ SameShape}(x, y)$ : existe um objeto  $y$  para o qual é verdade que todos os objetos  $x$  satisfaçam a fórmula  $\text{SameShape}(x, y)$  ???

a  $\rightarrow$  c (?)  
b  $\rightarrow$  c (?)  
c  $\rightarrow$  a (?)  
d  $\rightarrow$  a (?)

# Ordem dos Quantificadores

---

- Assim sendo alterações na ordem dos quantificadores consecutivos, provoca alterações no significado das fórmulas que deixam de ser equivalentes. De facto pode generalizar-se a situação ilustrada no exemplo para

$$\exists \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \varphi (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow_{\text{FO}} \forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \varphi (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

- **Se** a fórmula  $\exists \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \varphi (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é verdadeira **então**  $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \varphi (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  também é;
- A fórmula  $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \varphi (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  pode ser verdadeira e  $\exists \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \varphi (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  não ser !

A título de curiosidade se interpretássemos as frases anteriores da forma habitual, obteríamos fórmulas com a forma Aristotélica, e com a mesma “força de verdade” relativa

$$\exists \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \varphi (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow_{\text{FO}} \forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \psi (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

- “Para qualquer objeto existe **outro** da mesma forma”.

$$\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} (\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \wedge \text{SameShape} (\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

- “Existe um objeto que é da mesma forma de qualquer **outro** objeto”

$$\exists \mathbf{y} \forall \mathbf{x} (\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \rightarrow \text{SameShape} (\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$