

Lógica Computacional

Modus Ponens e Raciocínio Hipotético

Introdução e Eliminação da Implicação

Introdução e Eliminação da Equivalência

Completude e Coerência do Sistema de Dedução Natural

Modus Ponens e Modus Tollens

- Uma vez incluído o operador de implicação no sistema de Dedução Natural, há que definir regras para a sua introdução e de eliminação, tal como foi feito para os outros operadores.
- Essas regras deverão ser baseadas em padrões de raciocínio usados no dia a dia e podem ser ilustrados através de exemplos.

Exemplo 1:

Se o Tareco for um gato então ele mia. O Tareco é um gato. Logo ...

O Tareco mia.

- Este é um clássico exemplo de **Modus Ponens**, e que ilustra o raciocínio mais óbvio que se pode fazer com frases condicionais. Se uma implicação é verdadeira e se o implicante é verdadeiro, então o implicado também o será.
- Similarmente, se o implicado é falso (e a implicação verdadeira) então é o implicante que tem de ser falso. Esta regra do **Modus Tollens** pode ser ilustrada através do

Exemplo 2:

Se o Tareco for um gato então ele mia. Mas o Tareco não mia. Logo ...

O Tareco não é um gato.

Raciocínio Hipotético

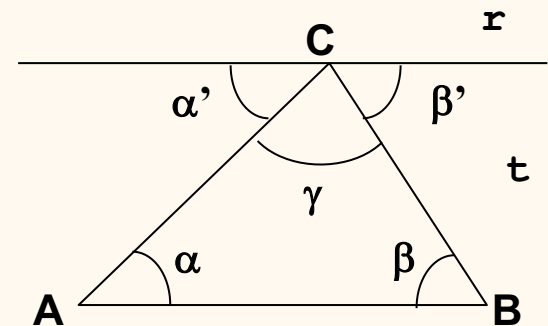
- Uma regra de inferência mais complexa é a que envolve a criação de frases condicionais. Estas permitem “condensar” um conjunto de passos de inferência que não nos interessa repetir cada vez que raciocinamos. Podemos exemplificar esta situação com a demonstração de um qualquer teorema como por exemplo.

- **Exemplo:**

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

- A demonstração pode ser algo como:

- i. Seja t um triângulo arbitrário:
- ii. Consideremos a recta r paralela ao lado AB do triângulo t que passa no ponto C .
- iii. Por serem definidos por rectas paralelas, os ângulos α e β serão iguais aos ângulos α' e β' .
- iv. Assim $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma$.
- v. Como α' , β' e γ formam um ângulo raso, a soma dos ângulos α' , β' e γ é 180° .



Raciocínio Hipotético

- Esta demonstração pode ser esquematizada “a la Fitch” da seguinte forma

Seja t um triângulo arbitrário

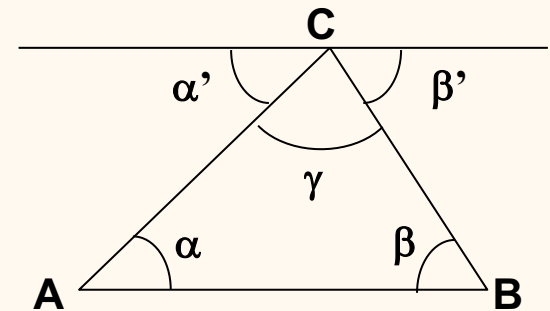
A recta r é paralela ao lado AB do triângulo t e passa no ponto C .

Os ângulos α e β serão iguais aos ângulos α' e β'

Assim $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma$

Mas $\alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$

A soma dos ângulos de t é 180°



- De notar que nesta demonstração não se infere que t é um triângulo, pois isso é apenas uma hipótese: “seja t um triângulo...”. O que se pode inferir é que, *independentemente de t ser ou não um triângulo,*

“Se t for um triângulo então a soma dos seus ângulos internos é de 180° ”.

Seja t um triângulo arbitrário

A recta r é paralela ao lado AB do triângulo t e passa no ponto C .

...

A soma dos ângulos de t é 180°

Se t for um triângulo então a soma dos seus ângulos internos é de 180°

Eliminação da Implicação

- Estamos pois em condições de formalizar, no sistema de Dedução Natural, as regras de Introdução e de Eliminação da Implicação.
- A regra de Eliminação da Implicação corresponde ao padrão de raciocínio do **Modus Ponens**.
- Já a introdução da implicação corresponde ao **Raciocínio Hipotético**

Eliminação da \rightarrow

k1	...	
	φ	
	...	
k2	$\varphi \rightarrow \psi$	
	...	
k	ψ	Elim \rightarrow : k1, k2
	...	

Nota:
 $k1 < k$
 $k2 < k$

Introdução da \rightarrow

	...	
k1	φ	

	...	
k2	ψ	
k	$\varphi \rightarrow \psi$	Intr \rightarrow : k1-k2
	...	

Padrões de Raciocínio com Implicações

- Modus Tollens:

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$$

1		$\varphi \rightarrow \psi$	
2		$\neg\psi$	
<hr/>			
3			φ
4			ψ Elim \rightarrow: 1, 3
5			\perp Intr \perp: 2, 4
6		$\neg\varphi$	Intr \neg: 3 - 5

- Contrapositiva

$$\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$$

1		$\varphi \rightarrow \psi$		
2			$\neg\psi$	
<hr/>				
3				φ
4				ψ Elim \rightarrow: 1, 3
5				\perp Intr \perp: 2, 4
6			$\neg\varphi$	Intr \neg: 3 - 5
7		$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	Intr \rightarrow: 2 - 6	

Padrões de Raciocínio com Implicações

- Dilema Construtivo:

$$\{\varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \alpha, \psi \rightarrow \beta\} \vdash \alpha \vee \beta$$

1	$\varphi \vee \psi$	
2	$\varphi \rightarrow \alpha$	
3	$\psi \rightarrow \beta$	
4	φ	
5	α	Elim \rightarrow : 2, 4
6	$\alpha \vee \beta$	Intr \vee : 5
7	ψ	
8	β	Elim \rightarrow : 3, 7
9	$\alpha \vee \beta$	Intr \vee : 8
10	$\alpha \vee \beta$	Elim \vee : 1, 4-6, 7-9

- Enfraquecimento do Consequente

$$\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \varphi \rightarrow (\psi \vee \phi)$$

- Fortalecimento do Antecedente

$$\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\varphi \wedge \phi) \rightarrow \psi$$

1	$\varphi \rightarrow \psi$	
2	φ	
3	ψ	Elim \rightarrow : 1, 2
4	$\psi \vee \phi$	Intr \vee : 1, 3
5	$\varphi \rightarrow (\psi \vee \phi)$	Intr \rightarrow : 2 - 4

Regras do Operador de Equivalência

- Dada que uma equivalência corresponde à implicação nos dois sentidos, as regras de introdução e de eliminação do operador de equivalência correspondem a uma “duplicação” das do operador de implicação.

Eliminação da \leftrightarrow

k_1	\dots	
	φ	
	\dots	
k_2	$\varphi \leftrightarrow \psi$	
	\dots	
k	ψ	Elim \leftrightarrow: k_1, k_2
	\dots	

ou

	\dots	
k_1	ψ	
	\dots	
k_2	$\varphi \leftrightarrow \psi$	
	\dots	
k	φ	Elim \leftrightarrow: k_1, k_2
	\dots	

Introdução da \leftrightarrow

	\dots		
k_1	φ	\dots	
	\dots		
k_2	ψ		
	\dots		
k_3	ψ	\dots	
	\dots		
k_4	φ		
	\dots		
k	$\varphi \leftrightarrow \psi$		Intr \leftrightarrow: k_1-k_2, k_3-k_4
	\dots		

Nota:

- $k > k_1$
- $k > k_2$
- $k > k_3$
- $k > k_4$

Padrões de Raciocínio com Equivalências

- Transitividade da Equivalência

$$\{\varphi \leftrightarrow \psi, \psi \leftrightarrow \phi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \phi$$

1		$\varphi \leftrightarrow \psi$	
2		$\psi \leftrightarrow \phi$	
<hr/>			
3		φ	
4		ψ	Elim \leftrightarrow : 1, 3
5		ϕ	Elim \leftrightarrow : 2, 4
6		ϕ	
7		ψ	Elim \leftrightarrow : 2, 6
8		φ	Elim \leftrightarrow : 1, 7
9		$\varphi \leftrightarrow \phi$	Intr \leftrightarrow : 3-5, 6-8

- Tal como a equivalência, também a implicação é transitiva:

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \phi\} \vdash \varphi \rightarrow \phi$$

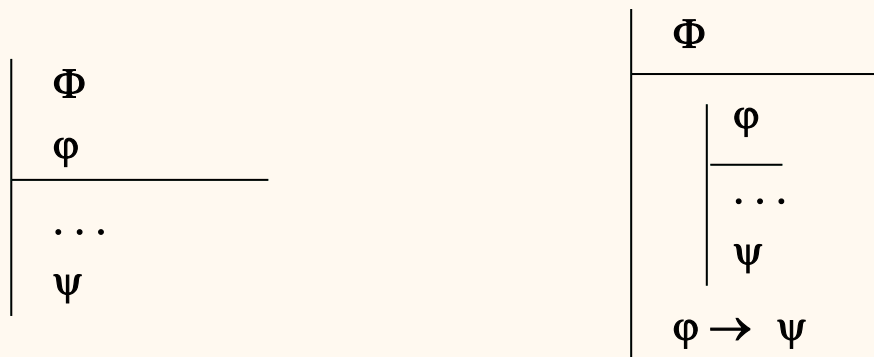
o que se poderia provar como para a equivalência (mas sem necessitar da “duplicação” da sub-demonstração).

Implicação e Dedução

- Como já deve ter sido notado existe uma relação estreita entre a implicação e a noção de dedução.
- Se a partir de um conjunto de hipóteses Φ , e de uma hipótese adicional φ se puder deduzir uma fórmula ψ , então também a partir das hipóteses iniciais se pode deduzir a fórmula $\varphi \rightarrow \psi$, isto é

$$\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Phi \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

- Com efeito, essencialmente a mesma demonstração pode ser utilizada em ambos os casos, como se indica de seguida



Dedução e Consequência Tautológica

- Uma constatação semelhante poderia ser feita entre a implicação e a consequência tautológica

$$\Phi \cup \{\varphi\} \models_T \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Phi \models_T \varphi \rightarrow \psi$$

que como sabemos pode ser aferida através do método da tabelas de verdade.

\Rightarrow Consideremos a tabela da direita. Se se verifica $\Phi \cup \{\varphi\} \models_T \psi$, então quando Φ e φ são verdade também o deve ser ψ .

Assim, nas linhas em que Φ é verdade, também a fórmula $\varphi \rightarrow \psi$ o é.

Φ	φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
V	V	V	V
V	F	X	V
F	V	X	?
F	F	X	V

Φ	φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	V

\Leftarrow Se a condição $\Phi \models_T \varphi \rightarrow \psi$ se verifica, então quando Φ é verdade também o deve ser $\varphi \rightarrow \psi$ (à esquerda).

Nessas linhas, se forem verdadeiras Φ e φ também o é ψ .

Sistemas de Dedução Natural Proposicional: T e DNp

- Mais interessante é verificar a relação entre demonstrações num sistema formal e a validade de uma argumentação, ou seja avaliar a **coerência** e **completude** do sistema.
- Assumamos que num sistema formal \mathcal{F} se pode demonstrar uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas dadas Φ .
- Nestas condições diz-se que o sistema \mathcal{F} é **coerente** apenas se a fórmula φ for uma consequência das premissas Φ .
- Como temos estado a definir, o sistema **DN proposicional (DNp)** contém regras de inferência de introdução e eliminação de

\wedge Conjunção	\neg Negação	\rightarrow Implicação	e ainda a
\vee Disjunção	\perp Contradição	\leftrightarrow Equivalência	= Igualdade

- No entanto vamos considerar o sistema proposicional **T**, que é o sistema de dedução natural **DNp** mas sem as regras da igualdade.

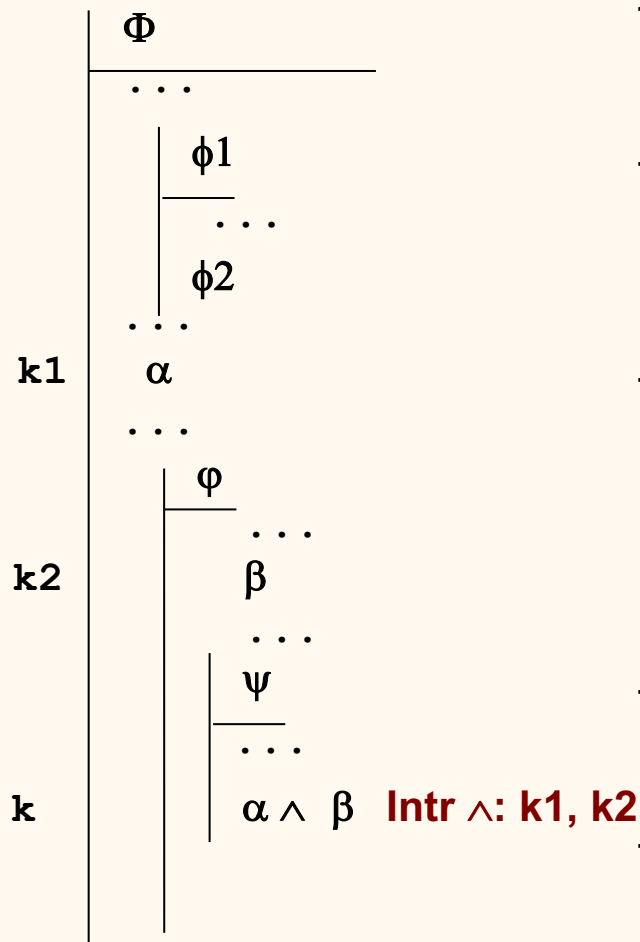
\wedge Conjunção	\neg Negação	\rightarrow Implicação
\vee Disjunção	\perp Contradição	\leftrightarrow Equivalência

Sistema T de Dedução Natural : Coerência

- Um sistema \mathcal{F} é **coerente** se toda a fórmula φ demonstrável através das regras do sistema é uma consequência das premissas Φ .
- Mas há vários tipos de consequências (tautológicas, lógicas e analíticas) sendo necessário precisar qual a que se considera no estudo da coerência de um sistema. Em particular, pode provar-se que
- **Coerência do sistema T:**
 - O sistema restrito de dedução natural T, é *tautologicamente* coerente.
- Este teorema pode demonstrar-se mostrando que qualquer fórmula que ocorre numa demonstração no sistema T, excepto as hipóteses consideradas em algumas regras (e.g. Intr \neg ou Intr \rightarrow), é uma consequência tautológica das premissas.
- Essa demonstração pode ser feita por **absurdo**: nenhuma fórmula numa demonstração pode ser a **primeira** que não é consequência tautológica das premissas.
- Como existem 12 regras, podemos demonstrar o absurdo **por casos**: em nenhum dos casos a fórmula introduzida pode ser a primeira que não é consequência tautológica das premissas. Vejamos alguns casos.

Sistema T de Dedução Natural: Coerência

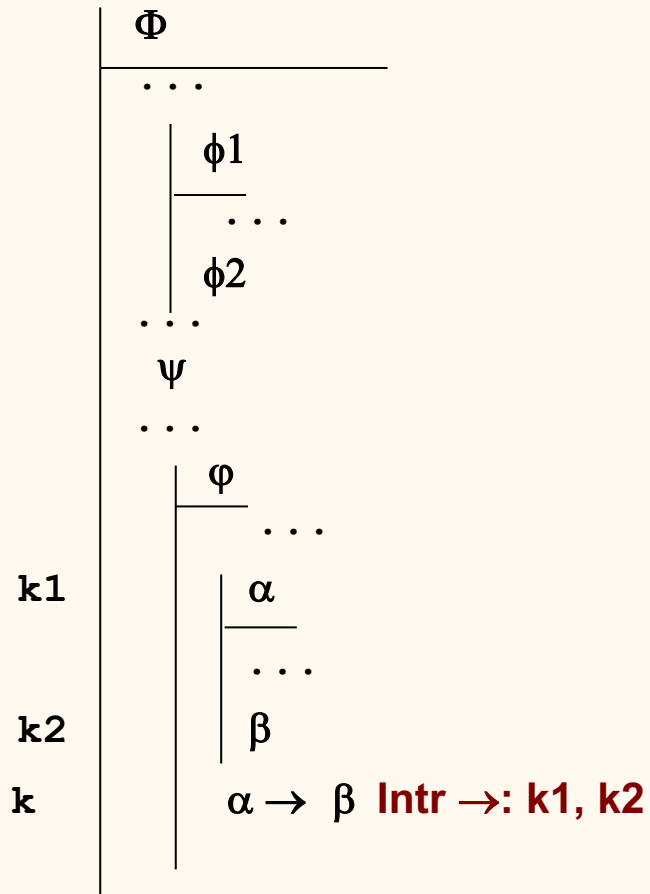
- **Caso 1:** A primeira fórmula incoerente numa demonstração não pode ser obtida na Introdução da Conjunção.



- Por hipótese, seja $k: \alpha \wedge \beta$ a primeira fórmula que é “incoerente” na demonstração.
- Considerando o seu contexto, então existe uma situação em que Φ , ϕ e ψ são todas verdadeiras mas em que a fórmula $\alpha \wedge \beta$ não o é.
- Como a primeira incoerência ocorre em k , as fórmulas $k1$ e $k2$ são “coerentes”. Mas então
 - Se todas as Φ são verdadeiras, α também é;
 - Se todas as Φ e ϕ são verdadeiras, β também é;
- Logo, se todas as Φ e ϕ são verdadeiras então também o é $\alpha \wedge \beta$, o que contraria à hipótese.
- Assim, a primeira fórmula incoerente não pode ser obtida por Introdução da Conjunção.

Sistema T de Dedução Natural: Coerência

- **Caso 2:** A primeira fórmula incoerente numa demonstração não pode ser obtida na Introdução da Implicação.



- Por hipótese, seja $k: \alpha \rightarrow \beta$ a primeira fórmula que é “incoerente” na demonstração.
- Considerando o seu contexto, então existe uma situação em que todas as Φ e φ são verdadeiras mas em que a fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ não o é.
- Como a primeira incoerência ocorre em k , a fórmula k_2 é “coerente”. Mas então
 - Se todas as Φ , φ e α são verdadeiras, β também é;
- Logo, se todas as Φ e φ são verdadeiras então também o é $\alpha \rightarrow \beta$, o que contraria à hipótese.
- Assim, a primeira fórmula incoerente não pode ser obtida por Introdução da Implicação.

Sistema T de Dedução Natural: Completude

- As outras 10 regras do sistema T podem ser analisadas de forma similar, demonstrando-se assim a coerência do sistema T, isto é .

$$\Phi \vdash_T \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \models_T \varphi$$

- A recíproca da coerência é a completude.
- Um sistema \mathcal{F} é **completo** se toda a fórmula φ que é uma consequência das premissas Φ é demonstrável no sistema.

- **Completude do sistema T:**

O sistema restrito de dedução natural T, é *tautologicamente* completo.

$$\Phi \models_T \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash_T \varphi$$

Sistema DNp : Coerência e Completude

- Como o sistema T não inclui as regras de introdução e eliminação da igualdade ele não é naturalmente completo logicamente (embora seja coerente obviamente). Assim, há fórmulas que são consequências lógicas das premissas e não podem ser deduzidas em T. Por exemplo

$$\{C(a), a = b\} \models_{FO} C(b) \quad \text{mas} \quad \text{não} \quad \{C(a), a = b\} \vdash_T C(b)$$

- No exemplo acima, a demonstração podia fazer-se facilmente com a regra de Eliminação da Igualdade, e portanto

$$\{C(a), a = b\} \models_{FO} C(b) \quad \text{e} \quad \{C(a), a = b\} \vdash_{DNp} C(b)$$

- Na realidade pode demonstrar-se a generalização dos teoremas anteriores para o caso em que consideramos consequências lógicas, isto é

Coerência e Completude do sistema DNp:

- O sistema restrito de dedução natural DNp, é *logicamente* coerente e completo para a lógica proposicional.