Lógica Computacional

Demonstrações Formais

Dedução Natural

Introdução e Eliminação da Conjunção

Introdução e Eliminação da Disjunção

Demonstrações Formais

- A análise do raciocínio feito durante as demonstrações feitas anteriormente e envolvendo conjunções e disjunções podem ser agora formalizados em regras de inferência usadas no sistema formal de Dedução Natural.

- Como explicado anteriormente uma demonstração é uma sequência Γ de fórmulas,
  - iniciada por um conjunto de fórmulas Φ que não necessitam de justificação (as premissas);
  - continuada por fórmulas justificadas por regras de inferência do sistema, aplicadas a fórmulas anteriores na sequência;
  - Sendo a última fórmula, φ, a que se pretende demonstrar.

- Vários sistemas de dedução (ou de demonstração) têm sido propostos e estudados, que se distinguem entre si pela linguagem em que se podem escrever as fórmulas de Γ e pelas regras de inferência utilizadas.

- Vamos estar naturalmente interessados na linguagem das fórmulas de 1ª ordem (FPOs) já definidas a partir de fórmulas atómicas e dos operadores Booleanos de conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$) e negação ($\neg$).

Demonstrações e Sistemas de Dedução

- Em geral, estaremos interessados em saber se a partir de um conjunto de premissas Φ é possível demonstrar uma fórmula φ no sistema de dedução X, usando as regras de inferência desse sistema X, o que denotaremos por

$$\Phi \vdash_X \varphi$$

- Obviamente, para um sistema ser útil as suas regras de inferência deverão ser de alguma forma adequadas.

- Em particular, estaremos interessados em utilizar sistemas de dedução que sejam **coerentes** e **completos**, ou seja em que se possam estabelecer as seguinte relações entre formulas demonstráveis no sistema X e conclusões válidas:

  - Coerência: $\Phi \vdash_X \varphi \implies \Phi \models \varphi$

  - Completude: $\Phi \models \varphi \implies \Phi \vdash_X \varphi$

- Este é o caso do sistema de **Dedução Natural** em que, como o nome indica, as regras de inferência tentam captar as formas de raciocínio usadas "no dia a dia".

Introdução e Eliminação da Conjunção

- Neste sistema, e como vimos nos exemplos anteriores de argumentação em língua natural, o raciocínio pode ser formalizado através de regras de **Introdução** e de **Eliminação** dos operadores Booleanos (tal como já tinha sido feito com o predicado de igualdade).

- No sistema de **Dedução Natural**, as regras de introdução e eliminação da conjunção são as seguintes

Introdução da $\wedge$

	...	
k1	φ	
	...	
k2	ϕ	
	...	
k	$\varphi \wedge \phi$	**Intr $\wedge$: k1,k2**

Nota:
k > k1
k > k2

Eliminação da $\wedge$

	...	
k	$\varphi \wedge \phi$	
	...	
k1	φ	**Elim $\wedge$: k**
	...	
k2	ϕ	**Elim $\wedge$: k**

Nota:
k1 > k
k2 > k

Introdução e Eliminação da Conjunção

Estas regras permitem naturalmente formalizar os raciocínios feitos anteriormente.

Exemplo:

```
1 | A Maria é alta
2 | O João é baixo
  |----------------------------------
3 | A Maria é alta e o João é baixo
```

```
1 | Alta(maria)
2 | Baixo(joão)
  |----------------------------------
3 | Alta(maria)∧ Baixo(joão)      Intr ∧: 1,2
```

Introdução da Disjunção

- A regra de introdução da disjunção é definida da seguinte forma.

Introdução da ∨

	...	
k	φ	
	...	
k1	$\varphi \vee \phi$	**Intr ∨: k**
	...	
k2	$\phi \vee \varphi$	**Intr ∨: k**

Nota:

k1 > k

k2 > k

Introdução da Disjunção

- Como vimos anteriormente, ao invés da conjunção, a introdução da disjunção permite concluir uma fórmula mais "fraca" do que a fórmula de partida, como se pode notar no exemplo seguinte.

Exemplo:

1	A Maria é alta	
2	A Maria é alta ou o João é baixo	

1	Alta(maria)	
2	Alta(maria)∨ Baixo(joão)	Intr ∨: 1

1	Alta(maria)	
2	Baixo(joão) ∨ Alta(maria)	Intr ∨: 1

Eliminação da Disjunção

- A eliminação da disjunção é a regra do sistema de dedução natural que capta o raciocínio por casos. É definida como se segue.

Eliminação da ∨

```
k1  | φ ∨ ψ
    |--------
m1  |  | φ
    |  |----
    |  | ...
m2  |  | ρ
    |
n1  |  | ψ
    |  |----
    |  | ...
n2  |  | ρ
k2  | ρ          Elim ∨ : k1, m1-m2, n1-n2
```

Nota:
m1 > k1
m2 > m1
n1 > k1
n2 > n1
k2 > m2
k2 > n2

Distribuição da $\wedge$ em Relação à $\vee$

- A partir destas regras poderemos verificar que certas regras de equivalência são demonstráveis no sistema DN. Em particular poderemos demonstrar as regras da distribuição envolvendo disjunções e conjunções

$$A \wedge (B \vee C) \models (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

1	$A \wedge (B \vee C)$	
2	A	Elim $\wedge$: 1
3	$B \vee C$	Elim $\wedge$: 1
4	B	
5	$A \wedge B$	Intr $\wedge$: 2,4
6	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Intr $\vee$: 5
7	C	
8	$A \wedge C$	Intr $\wedge$: 2,7
9	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Intr $\vee$: 8
10	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Elim $\vee$: 3,4-6,7-9

Distribuição da $\wedge$ em Relação à $\vee$

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \models A \wedge (B \vee C)$$

1	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
2	$\quad A \wedge B$	
3	$\quad A$	Elim $\wedge$: 2
4	$\quad B$	Elim $\wedge$: 2
5	$\quad B \vee C$	Intr $\vee$: 4
6	$\quad A \wedge (B \vee C)$	Intr $\wedge$: 3,5
7	$\quad A \wedge C$	
8	$\quad A$	Elim $\wedge$: 7
9	$\quad C$	Elim $\wedge$: 7
10	$\quad B \vee C$	Intr $\vee$: 9
11	$\quad A \wedge (B \vee C)$	Intr $\wedge$: 8,10
12	$A \wedge (B \vee C)$	Elim $\vee$: 1,2-6,7-11

Distribuição da ∨ em Relação à ∧

$A \lor (B \land C) \models (A \lor B) \land (A \lor C)$

```
 1 | A ∨ (B ∧ C)
   |----------------
 2 | | A
   | |--------
 3 | | A ∨ B                        Intr ∨: 2
 4 | | A ∨ C                        Intr ∨: 2
 5 | | (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)            Intr ∧: 3,4
 6 | | B ∧ C
   | |--------
 7 | | B                            Elim ∧: 6
 8 | | A ∨ B                        Intr ∨: 7
 9 | | C                            Elim ∧: 6
10 | | A ∨ C                        Intr ∨: 9
11 | | (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)            Intr ∧: 8,10
12 | (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)              Elim ∨: 1,2-5,6-11
```

Distribuição da $\vee$ em Relação à $\wedge$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \models A \vee (B \wedge C)$$

1	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
2	$A \vee B$	Elim $\wedge$: 1
3	$\quad A$	
4	$\quad A \vee (B \wedge C)$	Intr $\vee$: 3
5	$\quad B$	
6	$\quad A \vee C$	Elim $\wedge$: 1
7	$\quad\quad A$	
8	$\quad\quad A \vee (B \wedge C)$	Intr $\vee$: 7
9	$\quad\quad C$	
10	$\quad\quad B \wedge C$	Intr $\wedge$: 5,9
11	$\quad\quad A \vee (B \wedge C)$	Intr $\vee$: 10
12	$\quad A \vee (B \wedge C)$	Elim $\vee$: 6,7-8,9-11
13	$A \vee (B \wedge C)$	Elim $\vee$: 2,3-4,5-12

Visibilidade em Sub-Demonstrações

- Na aplicação das regras indicadas há que ter bastante cuidado com a visibilidade de fórmulas dentro das sub-demonstrações.

- Caso contrário podem cometer-se alguns erros óbvio como se pode ver no seguinte exemplo:

$$\{ B,\ A \lor B \} \models A \land B \quad ???$$

1	B	
2	$A \lor B$	
3	$\quad A$	
4	$\quad A \land B$	Intr $\land$: 1,3
5	$\quad B$	
6	$\quad A \land B$	Intr $\land$: ~~3~~,5
7	$A \land B$	Elim $\lor$: 2,3-4,5-6

?

Importante: Dentro de uma sub-demonstração só se vêem as fórmulas das sub-demonstrações que a contêm.