Lógica Computacional

Métodos de Inferência

Passos de Inferência

Raciocínio por Casos

Raciocínio por Absurdo

Inferência e Passos de Inferência

- A partir de um conjunto de premissas constituídas por proposições arbitrariamente complexas, podem inferir-se conclusões a partir de uma análise da estrutura das componentes dessas premissas (ou das conclusões pretendidas).

- Essas inferências podem ser arbitrariamente complexas, quer tendo em conta o número de premissas em que se baseiam, quer por via da complexidade das próprias premissas.

- No entanto, com mais ou menos dificuldade, elas podem ser justificadas, por uma sequência de passos de inferência, nos quais se vão estabelecendo conclusões intermédias, i.e. proposições que facilitam obter a conclusão desejada.

Inferência e Passos de Inferência

- Cada um desses passos intermédios deverá ser simples. Em particular
  - Os passos de inferência devem ser **válidos**.
    - Se as proposições usadas forem verdadeiras a conclusão também o deverá ser.
  - As proposições usadas deverão ser em número **reduzido**
    - Não deverão ser usadas mais de 2 proposições
  - Apenas deverá ser tida em conta a estrutura "**exterior**" dessas proposições, não tentando analisar a sua estrutura mais "interior".
    - Por exemplo se uma proposição for uma conjunção de disjunções, apenas usaremos o facto de ser uma conjunção!

- Vamos analisar através de alguns exemplos passos de inferência que são usados por todos nós, *mesmo que inconscientemente*, e que constituem os fundamentos da **dedução em língua natural**.

Passos de Inferência - Conjunção

As proposições constituídas por **conjunções** prestam-se a dois passos de inferência muito simples. Sucintamente

1. Se duas proposições forem verdadeiras a sua conjunção também o é.

1. A Maria é alta
2. O João é baixo
3. A Maria é alta e o João é baixo

2. Inversamente, se uma proposição conjuntiva é verdadeira, cada uma das suas proposições componentes deverá sê-lo igualmente.

1. A Maria é alta e o João é baixo
2. A Maria é alta
3. O João é baixo

Passos de Inferência - Disjunção

No caso de proposições constituídas por disjunções os passos de inferência são um pouco diferentes dos da conjunção.

1. Se uma proposição é verdadeira a sua disjunção também o é.

```
1. A Maria é alta
2. O João é baixo
-----------------
3. A Maria é alta ou o João é baixo
```

2. No entanto, a inversa não é válida. Se uma proposição disjuntiva é verdadeira, não é verdade que cada cada uma das suas proposições componentes o seja

```
1. A Maria é alta ou o João é baixo
-----------------
2. A Maria é alta     ???
3. O João é baixo     ???
```

Passos de Inferência - Disjunção

- A **disjunção** apresenta-se assim com diferenças importantes em relação à conjunção.

- Se a regra de “composição” da disjunção é válida, tal como era no caso da conjunção, ela é aparentemente **inútil**, já que permite concluir uma conclusão mais “fraca” que as premissas.

- Se se sabe que uma proposição é verdadeira “A Maria é alta”, que sentido faz inferir uma proposição mais “fraca” que a original “A Maria é alta ou … “ ?

- De facto esta regra só tem utilidade se considerarmos o conjunto mais completo de regras de inferência, como veremos adiante.

- Por outro lado, aparentemente não podemos fazer quaisquer inferências a partir de disjunções, já que não sabemos qual das proposições “disjuntas” é verdadeira.

- E no entanto o próximo exemplo, ilustra uma inferência válida que se pode obter a partir de uma proposição disjuntiva, **sem se saber qual dos disjuntos é verdadeiro**.

Passos de Inferência - Disjunção

Exemplo:

Existe um número racional **r**, que se pode escrever na forma de potência $\mathbf{r = a^b}$, em que quer a base **a**, quer o expoente **b** são números irracionais.

- À partida este resultado parece impossível de satisfazer. Por exemplo, se um número racional é aquele que é possível colocar na forma **m/n** em que **m** e **n** são números inteiros, é difícil de conceber que um número como $\mathbf{e}^{\pi}$ possa ser racional.

- De facto, se nem **e** nem π se podem colocar na forma de fracção, o que dizer do número $\mathbf{e}^{\pi}$?

- E no entanto ...

  existe um tal número!

- Normalmente a forma mais simples de demonstrarmos a existência de um número (ou objecto) com um conjunto de propriedades é indicarmos um exemplo!

- Curiosamente, o que faremos neste caso é provar que tal número existe, embora não possamos indicar qual seja esse número (pelo menos sem recorrer a matemática avançada).

Disjunção – Raciocínio por casos

Exemplo:

Existe um número racional **r**, que se pode escrever na forma de potência $\mathbf{r = a^b}$, em que quer a base **a**, quer o expoente **b** são números irracionais.

- Consideremos o número $\mathbf{r = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$. Como é sabido (e provaremos de seguida) o número $\sqrt{2}$ é um número irracional, e portanto **r** é claramente um número na forma $\mathbf{a^b}$ em que **a** e **b** são números irracionais.

- Embora não possamos concluir imediatamente que r seja um número racional ou irracional, podemos certamente dizer que **r**, tal como qualquer número real, **é racional ou não é racional (isto é irracional).**

- Estamos assim perante uma disjunção em que não podemos concluir nada sobre os disjuntos, isto é não podemos concluir que **r** seja racional ou que **r** seja irracional.

- Mas analisemos cada um dos casos separadamente.

Disjunção – Raciocínio por casos

Exemplo:

Existe um número racional **r**, que se pode escrever na forma de potência $\mathbf{r = a^b}$, em que quer a base **a**, quer o expoente **b** são números irracionais.

Caso 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional

- Neste caso, concluímos obviamente que “existe um número racional $\mathbf{r = a^b}$, em **a** e **b** irracionais”. De facto podemos dizer que esse número **r** é $\mathbf{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ **.**

Caso 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional

- Neste caso, consideremos o número $\mathbf{r' = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}}$. Esse número é claramente racional, já que $\mathbf{r'} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}*\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. Mas esse número tem base $\mathbf{a'} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irracional (por hipótese), e o expoente $\mathbf{b' = \sqrt{2}}$ é garantidamente irracional. Assim, podemos concluir que “existe um número racional $\mathbf{r = a^b}$, em **a** e **b** são irracionais”. Assim, com $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$, temos $\mathbf{r = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2}$**.**

- Assim sendo, em ambos os casos concluímos que “existe um número racional $\mathbf{r = a^b}$, com **a** e **b** irracionais”, embora não saibamos se esse número é $\mathbf{r} = \mathbf{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ (caso 1) ou se é $\mathbf{r = 2 = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}}$ (como no caso 2).

Disjunção – Raciocínio por casos

- A estrutura da argumentação pode ser apresentada da forma abaixo

```
 1. | √2^√2 é racional ou √2^√2 é irracional
    |----------------------------------------
m1. |  | √2^√2 é racional
    |  |--------------------
    |  | ...
m2. |  | Existe um r que é racional ...
    |
n1. |  | √2^√2 é irracional
    |  |--------------------
    |  | ...
n2. |  | Existe um r que é racional ...
 k. | Existe um r que é racional
```

- A disjunção 1 origina dois sub-argumentos, baseados em cada um dos disjuntos dessa proposição, ambos chegando à mesma conclusão.

- Apesar de não sabermos qual dos disjuntos é verdadeiro, um deles sê-lo-á, pelo que a conclusão comum é necessariamente válida.

Passos de Inferência - Negação

- No caso da negação já analisamos o caso da dupla negação que consideramos, a menos de graduações não consideradas na lógica de 1ª ordem como inferências válidas (de facto são equivalências)

```
1. │ A Maria é alta
   ├──────────────────────────────────────────
2. │ Não é verdade que a Maria não seja alta
2′ │ Não é verdade que a Maria seja baixa
```

```
1. │ Não é verdade que a Maria não seja alta
   ├──────────────────────────────────────────
2. │ A Maria é alta
```

- Estas regras, apenas permitem tratar pares de negações e não captam um tipo de raciocínio desenvolvido desde a antiguidade e utilizado frequentemente pelos gregos na sua sistematização dos sistemas de demonstração que desenvolveram (o expoente máximo é o trabalho de Euclides na sistematização da geometria através dos seus “Elementos”).

- Mais concretamente, o **raciocínio por absurdo**.

Negação – Raciocínio por absurdo

- O raciocínio por absurdo assume uma determinada hipótese e tenta, através de uma argumentação válida, chegar a uma conclusão que se verifica ser falsa.

- Como vimos, uma argumentação válida preserva a verdade, isto é, sempre que as premissas sejam verdadeiras a conclusão também o será.

- Mas se a conclusão obtida é falsa, então a única forma de justificar esse facto é termos iniciado a argumentação com premissas falsas.

1.	~~Todas as aves voam~~	1.	Todas as aves têm penas
2.	O Pingu é uma ave	2.	~~O Bobby é uma ave~~
3.	Mas ... o Pingu não voa !	3.	Mas ... o Bobby não tem penas !

- Isto é, pelo menos uma premissa é falsa, ... embora possa não ser claro qual delas.

- No raciocínio por absurdo, assume-se **uma única** premissa. Se a argumentação válida levar a uma conclusão falsa, somos levados a inferir que é **essa** premissa que é falsa!.

- Vamos ilustrar esta técnica de inferência com 2 exemplos famosos.

Negação - Raciocínio por absurdo

Exemplo 1:

- O conjunto dos números primos é infinito.

1.	O conjunto P dos primos é finito
2.	P = { 2,3,5,7, ... p}
3.	p é o maior número primo
4.	Seja q = 2*3*5*...*p + 1
5.	q não é divisível por 2 ($q = 2*q_2+1$)
6.	q não é divisível por 3 ($q = 3*q_3+1$)
	...
k.	q não é divisível por p ($q = p*q_p+1$)
k+1.	q não é divisível por nenhum primo
k+2.	q é primo (e maior que p)
k+3.	P = { 2,3,5,7, ... p, q} ≠ P

k+4. O conjunto C dos primos não é finito

- Desta forma, ao chegarmos a uma contradição (P ≠ P), podemos concluir que a premissa era falsa e portanto "O conjunto P dos primos não é finito".

Negação - Raciocínio por absurdo

Exemplo 2:

- O número √2 é irracional.

1.	O número √2 é racional
2.	√2 = m/n, sendo a fracção irredutível
3.	$2 = m^2 / n^2$
4.	$m^2 = 2 * n^2$
5.	m^2 é par
6.	m é par Será ?
7.	$m = 2*p$
8	$4p^2 = 2 * n^2$
9.	$n^2 = 2*p^2$
10.	n é par
11.	$n = 2*q$
12.	√2 = p/q
13.	m/n não é irredutível

14. O número √2 não é racional

- Desta forma, ao chegarmos a uma contradição (ao contrário da hipótese, m/n não é irredutível), podemos concluir que "**o número √2 não é racional**".

Negação - Raciocínio por absurdo

- De notar que o raciocínio por absurdo foi utilizado durante esta última demonstração, nomeadamente para provar que "**se m^2 é par então m também é par**".

- Assim poderíamos ter feito a seguinte demonstração para esse resultado

```
        ...
5.      m² é par
k+1.    | m não é par
        |-------------------
k+2.    | m = 2*r+1
k+3.    | m² = 4*r²+4*r + 1
k+4.    | m² = 2*(2*r²+2*r) + 1
k+5.    | m² não é par !
k+6.    é falso que m não seja par
6.      m é par
        ...
```

- Neste caso, sabendo-se que m^2 é par, a hipótese adicional de "m não ser par" conduz a uma contradição (m^2 não ser par!).

- Assim, a hipótese adicional é falsa, logo é falso que m não seja par, ou seja, m é par!

- **Nota:** Em rigor, as linhas k+1 a k+6 deveriam ser incluídas na demonstração anterior.