Lógica Computacional

Verdades e Falsidades

Tautológicas, Lógicas e Analíticas

Consequência e Equivalência

Álgebra de Boole

Consequências Tautológicas, Lógicas e Analíticas

- Como vimos, o nível a que se deve analisar a consequência (analítica, lógica e tautológica), tem em conta uma quantidade decrescente de conhecimento.

Exemplo 1:

√ • TW: $\{Tet(a) \lor Tet(b), \neg Tet(a)\} \models_{TW} Tet(b)$

√ • FO: $\{T(a) \lor T(b), \neg T(a)\} \models_{Fo} T(b)$

√ • TT: $\{A \lor B, \neg A\} \models_{TT} B$

Exemplo 2:

√ • TW: $\{Tet(a) \lor Tet(b), \neg Tet(c), a = c\} \models_{TW} Tet(b)$

√ • FO: $\{T(a) \lor T(b), \neg T(c), a = c\} \models_{FO} T(b)$

✗ • TT: $\{A \lor B, \neg C, D\} \models_{TT} B$

Exemplo 3:

√ • TW: $\{Tet(a) \lor Tet(b), \neg Tet(c), a = c\} \models_{TW} \neg Cube(b)$

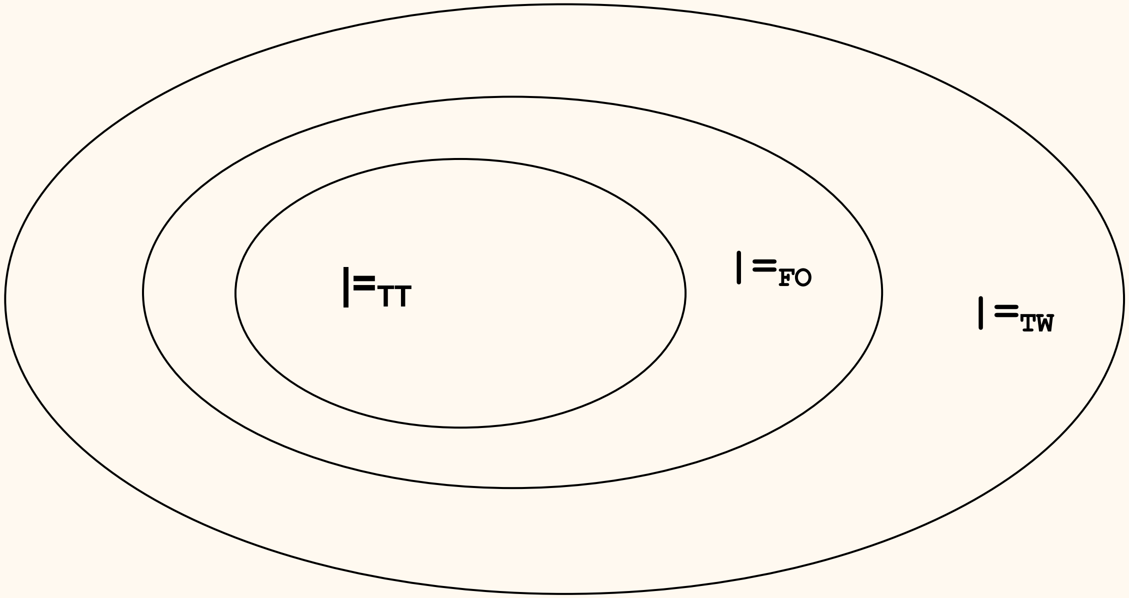
✗ • FO: $\{T(a) \lor T(b), \neg T(c), a = c\} \models_{FO} \neg C(b)$

✗ • TT: $\{A \lor B, \neg C, D\} \models_{TT} \neg E$

Consequências Tautológicas, Lógicas e Analíticas

- Como pode ser facilmente observado, qualquer fórmula que seja uma consequência tautológica de um conjunto de premissas é igualmente uma consequência lógica dessas premissas, mas a inversa não é verdadeira.

- Similarmente, qualquer fórmula que seja uma consequência lógica de um conjunto de premissas é igualmente uma consequência analítica dessas premissas, mas a inversa não é verdadeira.



Verdades Tautológicas, Lógicas e Analíticas

- Um caso especial de consequência ocorre quando o conjunto de premissas é vazio, pois nesse caso a conclusão é consequência de qualquer conjunto de premissas!
  - Intuitivamente as premissas permitem eliminar linhas em que elas não sejam todas verdadeiras. Não havendo premissas, não há linhas e eliminar e a conclusão deverá ser verdadeira em todas as interpretações!

- $\models_X \phi$: As fórmulas ϕ que são consequências, tautológicas, lógicas ou analíticas, de um conjunto vazio de premissas são **verdades tautológicas, lógicas ou analíticas**.
  - Denotaremos estas propriedades por V-TT, V-FO e V-TW, respectivamente.
  - As V-TT são vulgarmente denotadas por **tautologias** e as V-FO por **necessidades lógicas**.

- $\models_X \neg\phi$: Identicamente, chamaremos **falsidades tautológicas, lógicas ou analíticas**, às fórmulas ϕ cuja *negação* sejam consequências, tautológicas, lógicas ou analíticas, de um conjunto vazio de premissas.
  - Denotaremos estas propriedades por F-TT, F-FO e F-TW, respectivamente.
  - As N-TT (e as N-FO) são geralmente denotadas por contradições (lógicas).

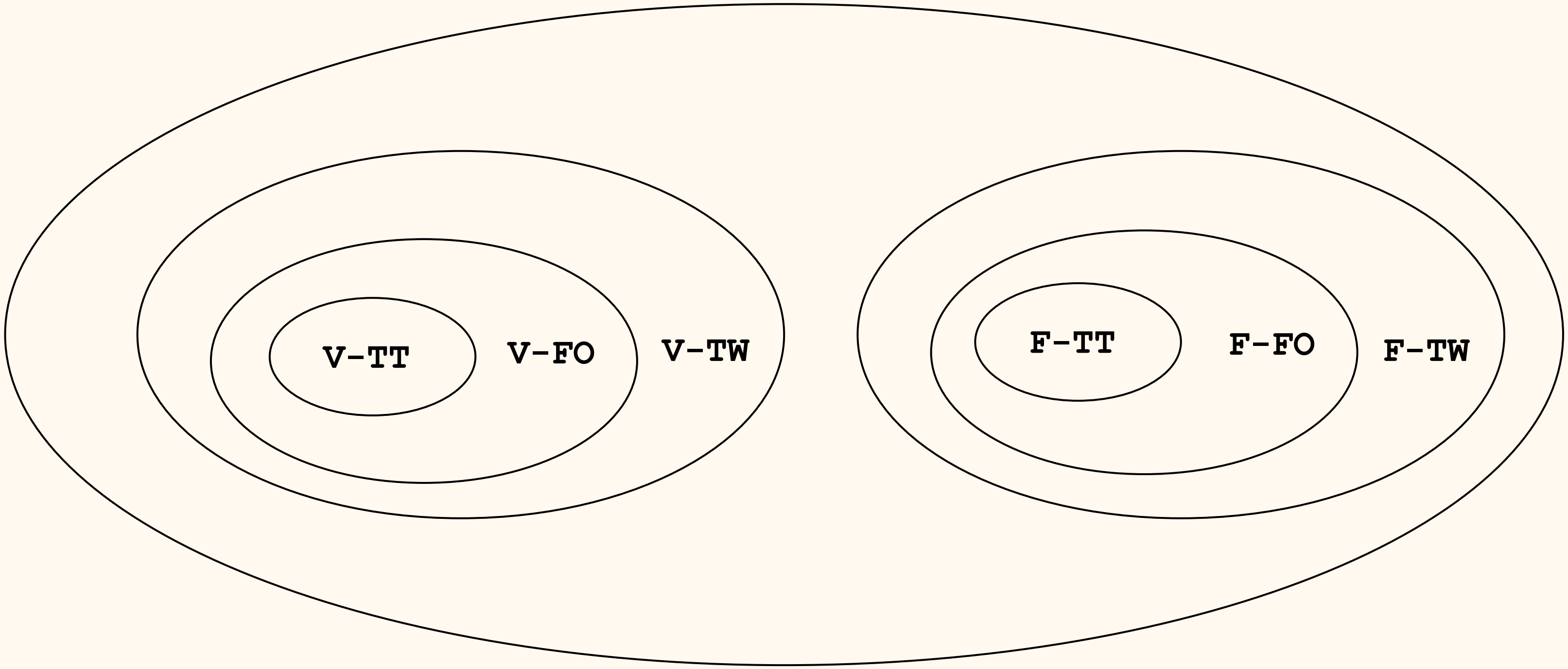
- $\not\models_X \neg\phi$: Finalmente, chamaremos **possibilidades tautológicas, lógicas ou analíticas**, às fórmulas que não sejam falsidades, tautológicas, lógicas ou analíticas.
  - Denotaremos estas propriedades por P-TT, P-FO e P-TW, respectivamente.

Consequências Tautológicas, Lógicas e Analíticas

- As fórmulas representando Verdades e Falsidades, tautológicas, lógicas e analíticas, têm naturalmente a mesma relação de inclusão das respectivas consequências.

$$\textbf{V-TT} \subset \textbf{V-FO} \subset \textbf{V-TW}$$

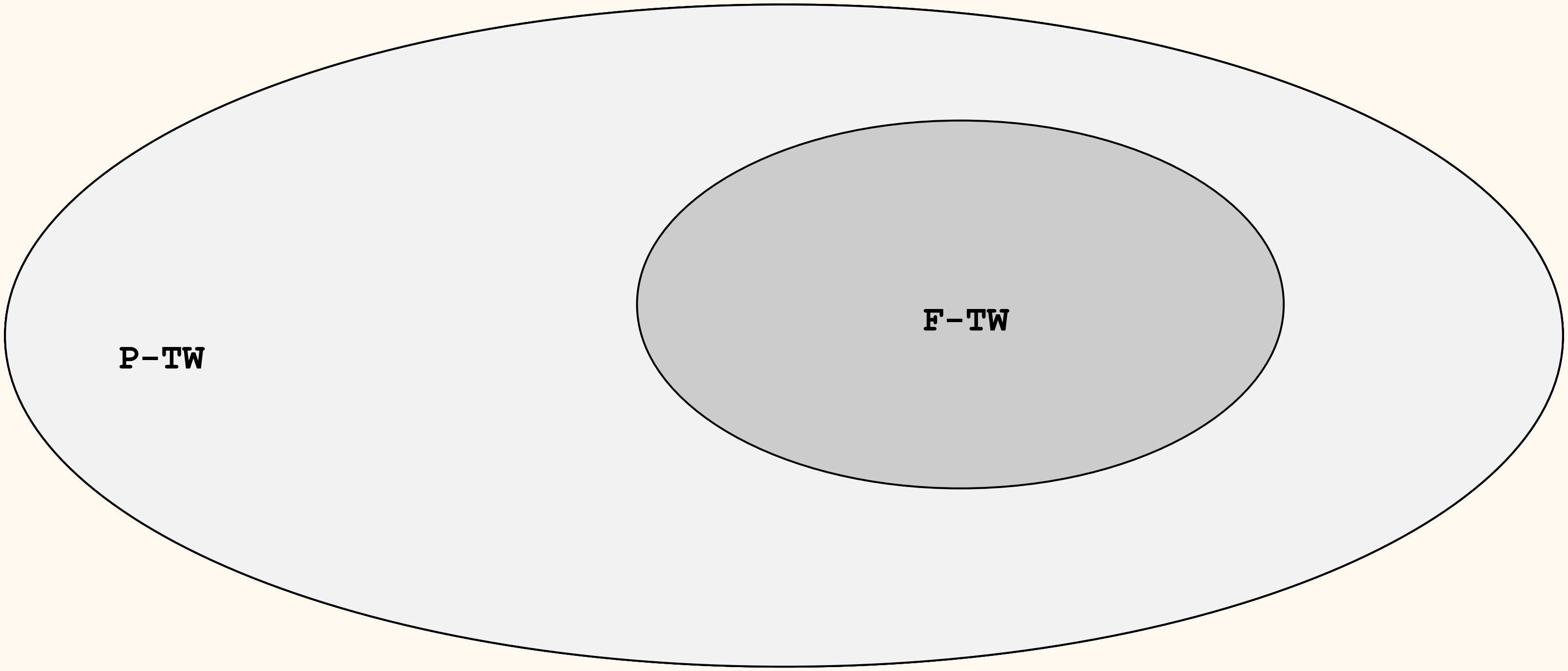
$$\textbf{F-TT} \subset \textbf{F-FO} \subset \textbf{F-TW}$$



Consequências Tautológicas, Lógicas e Analíticas

- Já as fórmulas representando Possibilidades tautológicas, lógicas e analíticas, têm a relação oposta de inclusão das respectivas consequências, pois são os complementos dos conjuntos de Verdades e Falsidades.

$$\textbf{P-TW} \subset \textbf{P-FO} \subset \textbf{P-TT}$$
$$\textbf{F-TW} \supset \textbf{F-FO} \supset \textbf{F-TT}$$



Verdades Tautológicas, Lógicas e Analíticas

Exemplos:

- **Large(a) ∨ ¬Large(a)**
  - **L(a) ∨ ¬L(a)**
  - **L ∨ ¬L**

  V-TT e portanto V-FO e V-TW

- **Dodec(b) ∧ ¬Dodec(b)**
  - **D(b) ∧ ¬D(b)**
  - **D ∧ ¬D**

  F-TT e portanto F-FO e F-TW

- **Large(a) ∨ Small(a)**
  - **L(a) ∨ S(a)**
  - **L ∨ S**

  P-TW e portanto P-FO e P-TT

- **(Tet(a) ∨ ¬Tet(b)) ∨ ¬ a = b**
  - **(T(a) ∨ ¬T(b)) ∨ ¬ a = b**
  - **(A ∨ B) ∨ ¬ I**

  V-FO portanto V-TW mas apenas P-TT

- **Tet(a) ∧ ¬Tet(b) ∧ a = b**
  - **(T(a) ∧ ¬T(b)) ∧ a=b**
  - **(A ∧ ¬B) ∧ I**

  F-FO portanto F-TW mas apenas P-TT

- **(Tet(a) ∨ Cube(b) ∨ Dodec(b)) ∨ ¬ a = b**
  - **(T(a) ∨ C(b) ∨ D(b)) ∨ ¬ a = b**
  - **(T ∨ C ∨ D) ∨ ¬ I**

  V-TW mas apenas P-FO e P-TT

- **Tet(a) ∧ Cube(b) ∧ a = b**
  - **T(a) ∧ C(b) ∧ a=b**
  - **T ∧ C ∧ I**

  F-TW mas apenas P-FO e P-TT

Equivalência de Fórmulas

- Em alguns casos sucede que não só a fórmula φ é consequência (tautológica, lógica ou analítica) de outra fórmula ϕ, como também ϕ é consequência de φ.
- Neste caso, dizemos que as fórmulas ϕ e g são (tautológica, lógica ou analíticamente) **equivalentes**.

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi \equiv_{def} \phi \models \varphi \;\wedge\; \varphi \models \phi$$

- Exemplificamos esta relação de equivalência entre fórmulas a nível tautológico com alguns exemplos. Começamos por um exemplo bem conhecido de uma das leis de de Morgan

$$\neg\,(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

A	B	¬	(A ∨ B)	¬A	∧	¬B
V	V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V

Equivalência de Fórmulas

- De notar que em muitos casos a relação de consequência apenas se verifica numa direcção. Por exemplo, temos que

$$A \wedge B \models A \vee B$$

mas

$$A \vee B \not\models A \wedge B$$

A	B	$(A \vee B)$		$A \wedge B$
V	V	V	← ====== →	V
V	F	V	← ======	F
F	V	V	← ======	F
F	F	F	← ====== →	F

Formas Normais

- Se duas fórmulas são equivalentes elas representam proposições com o mesmo valor de verdade, e podem ser consideradas formas diferentes de descrever uma mesma proposição.
- No entanto, algumas formas podem ser mais convenientes que outras para determinar o valor de verdade de uma proposição. Por exemplo para uma pessoa é mais fácil apreender o significado de

  $A \land B$ — A e B são verdade

  do que

  $\neg(\neg A \lor \neg B)$ — É falso que ou A seja falso ou B seja falso

- Por outro lado, será em geral útil obter uma forma "**canónica**" de duas fórmulas para as relacionar, nomeadamente para identificar imediatamente se elas representam a mesma proposição, ou se têm uma determinada propriedade.
- Em particular, certas formas são convenientes para determinados sistemas formais, como veremos mais tarde.
- Neste sentido são definidas 3 tipos de formas "normalizadas", mais vulgarmente conhecidas como formas normais (NNF, CNF e DNF).

Álgebra de Boole

- Antes de estudar as formas normais e as regras para a sua conversão, é conveniente considerar que as fórmulas que temos considerado podem ser consideradas como elementos de uma álgebra ***de Boole*** que inclui:
  - os símbolos “**0**“ e “**1**“ (denotando respetivamente Falso e Verdade);
  - e as operações “$\neg$“, “$\wedge$“ e “$\vee$“ (denotando Negação, Conjunção e Disjunção).
  - Símbolos Proposicionais, **(P, Q, ..**) de uma assinatura Σ

- Nessa álgebra são válidas várias regras de **equivalência** (que podem ser facilmente verificadas através de tabelas de verdade).

- As regras seguintes permitem a “simplificação” de fórmulas

En. Elemento Neutro

$$A \vee 0 \Leftrightarrow A$$
$$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$$

Ea. Elemento Absorvente

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$$
$$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

Id. Idempotência

$$A \vee A \Leftrightarrow A$$
$$A \wedge A \Leftrightarrow A$$

Tt/Ct. Tautologia e Contradição

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$$
$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$$

DN. Dupla Negação

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

Álgebra de Boole

- As próximas regras permitem re-organizar as fórmulas (“eliminar os parenteses”) sem alterar a sua estrutura

Cm. Comutação

$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

As. Associação

$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee B \vee C$

$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge B \wedge C$

- Já as regras seguintes alteram significativamente essa estrutura

dM. Leis de de Morgan

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

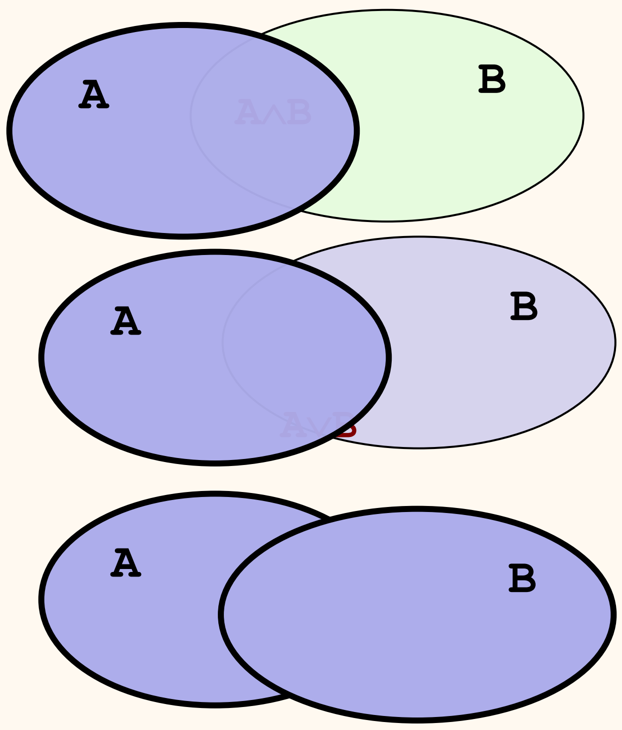
Di. Leis de Distribuição

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Álgebra de Boole

- Além destas regras básicas, outras regras de equivalência podem ser úteis na simplificação de fórmulas Booleanas, nomeadamente as regras de



El. Eliminação

$$A \lor (A \land B) \Leftrightarrow A$$
$$A \land (A \lor B) \Leftrightarrow A$$

$A \lor (A \land B)$
$\Leftrightarrow (A \land 1) \lor (A \land B)$
$\Leftrightarrow A \land (1 \lor B)$
$\Leftrightarrow A \land 1$
$\Leftrightarrow A$

Ab. Absorção

$$A \land (\neg A \lor B) \Leftrightarrow A \land B$$
$$A \lor (\neg A \land B) \Leftrightarrow A \lor B$$

$A \lor (\neg A \land B)$
$\Leftrightarrow (A \lor \neg A) \land (A \lor B)$
$\Leftrightarrow 1 \land (A \lor B)$
$\Leftrightarrow A \lor B$

Álgebra de Boole

Dualidade

- Como é definida, a álgebra de Boole goza do princípio da **dualidade**:

  Qualquer fórmula é equivalente a outra em que se substituam os símbolos:

  0 por **1** e $\wedge$ por $\vee$

Exemplos:

- Elemento Neutro:

$$A \vee 0 \Leftrightarrow A \quad \leftarrow\rightarrow \quad A \wedge 1 \Leftrightarrow A$$

- Elemento Absorvente:

$$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \quad \leftarrow\rightarrow \quad A \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

- Contradição / Tautologia

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0 \quad \leftarrow\rightarrow \quad A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$$

- Leis de de Morgan

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \quad \leftarrow\rightarrow \quad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

- Eliminação

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A \quad \leftarrow\rightarrow \quad A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

- Absorção

$$A \wedge (\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge B \quad \leftarrow\rightarrow \quad A \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow A \vee B$$