Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2021/ 22 – 4.º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**n.º:**

1. **(2.5 vals)** Considere o conjunto *S* de cláusulas Horn abaixo.

1. $(A \land B) \rightarrow G$	6. $\top \rightarrow C$
2. $\top \rightarrow A$	7. $(C \land H) \rightarrow \bot$
3. $(C \land D) \rightarrow G$	8. $G \rightarrow H$
4. $(A \land C) \rightarrow E$	9. $\top \rightarrow B$
5. $\top \rightarrow D$	10. $(A \land H) \rightarrow \bot$

a) Mostre que este conjunto de cláusulas é insatisfazível.

Para satisfazer o conjunto, e pelas claúsulas **2**, **9**, **6** e **5**, os "factos" **A**, **B**, **C** e **D** têm de ser verdade. Mas então, pelas cláusulas **1** ou **3**, **G** tem de ser verdade e, pela claúsula **8**, **H** tem de ser igualmente verdade. Então quer pela cláusula **7**, quer pela cláusula **10**, o átomo $\bot$ tem de ser verdade, o que é impossível.

b) Mostre que retirando uma única cláusula, o conjunto restante passa a ser satisfazível. Qual das cláusulas retiraria e indique uma interpretação que tornaria o restante conjunto satisfazível.

Cláusula retirada: 8

Interpretação que satisfaz as cláusulas restantes:

A = T (2) B = V (9) C = V (6) D = V (5)

E = T (4) G = T (1,3) H = F (após retirada a cláusula 8)

2. **(3.5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$A \rightarrow (D \rightarrow C)$
P2	$C \leftrightarrow (A \land B)$
Z	$(A \land \neg B) \rightarrow \neg D$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão (Z) na forma clausal.

1. $\neg A \lor C \lor \neg D$	de P1
2. $\neg A \lor \neg B \lor C$	de P2
3. $A \lor \neg C$	de P2
4. $B \lor \neg C$	de P2
5. A	de $\neg Z$
6. $\neg B$	de $\neg Z$
7. D	de $\neg Z$

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

8. $\neg A \lor C$	Res 7, 1
9. C	Res 8, 5
10. B	Res 9, 4
11. $\square$	Res 10, 6

3. **(2 vals)** Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Só os cubos que estejam ao lado de um outro bloco podem ser pequenos.

$\forall x\ (Small(x) \rightarrow (Cube(x) \land \exists y\ Adjoins(x,y)))$

b) Não há dodecaedros, exceto o **d**, que estejam na mesma coluna de outros blocos.

$\forall x\ (Dodec(x) \land x \neq d) \rightarrow \neg \exists y\ (x \neq y \land SameCol(x,y))$

c) Blocos do mesmo tamanho estão na mesma linha se e apenas se tiverem a mesma forma.

$\forall x\ \forall y\ (SameSize(x,y) \rightarrow (SameRow(x,y) \leftrightarrow SameShape(x,y)))$

d) Existe um dodecaedro à frente de todos os outros blocos.

$\exists x\ (Dodec(x) \land \forall y\ (x \neq y \rightarrow FrontOf(x,y)))$

e) Se um bloco está entre outros dois, então estes dois não podem ser ambos cubos.

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (Between(x,y,z) \rightarrow \neg\ (Cube(y) \land Cube(z)))$

4. **(1.5 vals)** Converta as fórmulas para a forma Prenex com a matriz na forma normal conjuntiva (CNF).

a) $\exists x\ (Dodec(x) \land \forall y\ (Large(y) \rightarrow FrontOf(y,x)))$

$\exists x\ \forall y\ (Dodec(x) \land (\neg\ Large(y) \lor FrontOf(y,x)))$

b) $\neg\ \exists x\ ((Tet(x) \lor Large(x)) \land\ \exists y\ (Adjoins(y,x))$

$\forall x\ \forall y\ [(\neg\ Tet(x) \lor \neg\ Adjoins(y,x)) \land (\neg\ Large(x) \lor \neg\ Adjoins(y,x))]$

c) $\forall x\ (\ \exists y\ (Cube(y) \land Adjoins(y,x)) \rightarrow Small(x))$

$\forall x\ \forall y\ (\neg\ Cube(y) \lor \neg\ Adjoins(y,x) \lor Small(x))$

5. **(2 vals)** Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, as seguintes fórmulas Prenex:

a) $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (Small(x) \rightarrow (Adjoins(y,x) \land (Cube(z) \rightarrow SameCol(z,y)))$

1. $\neg\ Small(x) \lor Adjoins(f(x),x)$
2. $\neg\ Small(x) \lor \neg\ Cube(z) \lor \neg\ SameCol(z,f(x))$

b) $\forall x\ \forall y\ \exists z\ ((Cube(x) \land Tet(y)) \rightarrow (Dodec(z) \land Between(z,x,y)))$

1. $\neg\ Cube(x) \lor \neg\ Tet(y) \lor Dodec(f(x,y))$
2. $\neg\ Cube(x) \lor \neg\ Tet(y) \lor Between(f(x,y),x,y)$

6. **(1 val)** Obtenha a substituição mais geral σ que unifique os dois termos abaixo. Indique qual o termo obtido quando se aplica essa substituição a qualquer um dos termos unificados.

T1: triple(g(x), y, f(x,y))   T2: triple(u, h(v), f(w,w))

substituição σ = {u/g(h(v)), y/h(v), w/x, x/h(v)}

T1 σ = T2 σ = triple(g(h(v)), h(v), f(h(v),h(v)))

7. **(5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

```
1. ∀x (Cube(x) → ∃y (Tet(y) ∧ Adjoins(x,y)))
2. ¬ ∃x ∃y (Adjoins(x,y) ∧ (Tet(x) ∨ Tet(y)))
3. ∀x (Large(x) → Cube(x))
C  ¬∃x Large(x)
```

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

```
1.¬ Cube(x1) ∨ Tet(f(x1))                 de P1
2.¬ Cube(x2) ∨ Adjoins(x2,f(x2))          de P1
3.¬ Adjoins(x3,y3) ∨ ¬ Tet(x3)            de P2
4 ¬ Adjoins(x4,y4) ∨ ¬ Tet(y4)            de P2
5.¬ Large(x5) ∨ Cube(x5)                  de P3
6.Large(a)                                de ¬C
```

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

```
 7. Cube(a)              Res  6,5 {x5/a}
 8. Adjoins(a,f(a))      Res  7,2 {x1/a}
 9. ¬ Tet(f(a))          Res  8,4 {x4/a, y4/f(a)}
10. ¬ Cube(a)            Res  9,1 {x1/a}
11. □                    Res 10,7 {}
```

8. **(2.5 vals)** Prove por indução sobre os números naturais, que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,(i+1)} = \frac{n}{n+1}$, para qualquer **n** natural.

Passo Base:

Para n = 1 confirmamos que **1/1(1+1) = 1/(1+1) = 1/2.**

Passo de Indução: $\sum_{i=1}^{n} 1/i(i+1) = n/(n+1)$: $\sum_{i=1}^{n+1} 1/i(i+1) = (n+1)/(n+2)$

$\sum_{i=1}^{n+1} 1/i(i+1)$ =

$= \sum_{i=1}^{n} 1/i(i+1) + 1/[(n+1)(n+2)]$	Por definição
= n/(n+1) + 1/[(n+1)(n+2)]	Por hipótese de indução
= [n(n+2)/[(n+1)(n+2)]+ 1/[(n+1)(n+2)]	Igualar denominador
= [n(n+2)+1]/[(n+1)(n+2)]	Soma de frações c/ igual denominador
= [n^2+2n+1] /[(n+1)(n+2)]	Produto de polinómios
= $(n+1)^2$ /[(n+1)(n+2)]	Quadrado do binómio n+1
= (n+1) / (n+2)	Simplificação de fração

q.e.d.