Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2021/22 – 3.º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	n.º:

1. **(3 val)** Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Todos os cubos, exceto o **c**, estão entre dois blocos.

$$\forall x\ ((\mathrm{Cube}(x) \land x \neq c) \rightarrow \exists y\ \exists z\ \mathrm{Between}(x,y,z))$$

b) Não há blocos maiores do que um certo tetraedro.

$$\exists x\ (\mathrm{Tet}(x) \land \neg \exists y\ \mathrm{Larger}(x,y))$$

c) Objetos que estejam na mesma linha do dodecaedro **a** ou não são cubos ou são grandes.

$$\mathrm{Dodec}(a) \land \forall x\ (\mathrm{SameRow}(x,a) \rightarrow (\mathrm{Large}(x) \lor \neg \mathrm{Cube}(x))$$

d) Dois blocos só estão na mesma coluna se nenhum for um tetraedro.

$$\forall x\ \forall y\ (x \neq y \land \mathrm{SameCol}(x,y)) \rightarrow (\neg \mathrm{Tet}(x) \land \neg \mathrm{Tet}(y)))$$

e) Todos os blocos estão ao lado de um outro, mas nenhum está ao lado de todos os outros.

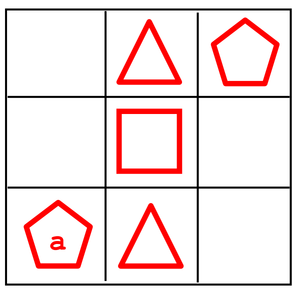
$$\forall x\ \exists y\ (\mathrm{Adjoins}(x,y)) \land \neg \exists x\ \forall y\ \mathrm{Adjoins}(x,y)$$

f) Se um bloco está entre dois outros, então estes dois estão em linhas diferentes.

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (\mathrm{Between}(x,y,z) \rightarrow \neg \mathrm{SameRow}(x,y))$$

2. **(3 val)** Considerando a linguagem dos Mundos de Tarski (num tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (\mathrm{Between}(x,y,z) \rightarrow \mathrm{SameShape}(y,z))$
2. $\mathrm{Dodec}(a) \land \exists x\ \exists y\ \mathrm{Between}(x,a,y)$
3. $\exists x\ \exists y\ \exists z\ (\mathrm{Tet}(x) \land \mathrm{Between}(z,x,y))$
4. $\neg \exists x\ (\mathrm{FrontOf}(x,a) \land \neg \exists x\ \mathrm{LeftOf}(x,a))$
5. $\forall x\ \forall y\ ((\mathrm{Tet}\ (x) \land \mathrm{Tet}(y)) \rightarrow \mathrm{SameCol}(x,y))$
6. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (\mathrm{Between}(x,y,z) \rightarrow \mathrm{Cube}(x))$



3. **(4 val)** Preencha as caixas assinaladas para completar a demonstração no sistema de Dedução Natural.

```
1    | ∃x (Cube(x) ∧ ∀y SS(x,y))
2    | ∀x (Tet(x) → ∃y ¬ SS(x,y))
3    | ∀x ∀y ∀z ((SS(x,y) ∧ SS(x,z)) → SS(y,z))
     |----------------------------------------
4    | | b:
     | |-----------------
5    | | | Tet(b)
     | | |-------
6    | | | Tet(b) → ∃y ¬ SS(b,y))          Elim ∀  : 2
7    | | | ∃y ¬ SS(b,y)                    Elim →  : 5, 6
8    | | | | c: Cube(c) ∧ ∀y  SS(c,y)
     | | | |--------------------------
9    | | | | | a: ¬ SS(b,a)
     | | | | |-------------
10   | | | | | ∀y SS(c,y)                Elim ∧  : 8
11   | | | | | SS(c,b)                   Elim ∀  : 10
12   | | | | | SS(c,a)                   Elim ∀  : 10
13   | | | | | SS(c,b) ∧ SS(c,a)         Intr ∧  : 11 , 12
14   | | | | | (SS(c,b) ∧ SS(c,a)) → SS(b,a)   Elim ∀  : 3
15   | | | | | SS(b,a)                   Elim →  : 13, 14
16   | | | | | ⊥                         Intr ⊥  : 9 , 15
17   | | | | ⊥                           Elim ∃  : 7 , 9 - 16
18   | | | ⊥                             Elim ∃  : 1 , 8 - 17
19.  | | ¬ Tet(b)                        Intr ¬  : 5 - 18
20   | ∀x ¬ Tet(x)                       Intr ∀  : 4 - 19
```

4. **(3 val)** Considere o seguinte argumento usando a linguagem de Tarski, e a respetiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

```
1.  | ∀x (Cube(x) → Small(x))
2.  | ∃x ¬ Small(x)
    |-------------------------
3.  | | ∃x Cube(x)
    | |-----------------------
4.  | | | a: Cube(a)
    | | |---------------------
5.  | | | Cube(a) → Small(a)         Elim ∀ : 1
6.  | | | Small(a)                   Elim →: 4 , 5
7.  | | | ∃y Small(y)                Intr ∃ : 6
8.  | | | ⊥                          Intr ⊥ : 2, 7
9.  | | ⊥                            Reit   : 8
10. | ¬ ∃x Cube(x)                   Intr ⊥ : 3 - 9
```

a) Indique todos os erros da demonstração acima, justificando.

Erros:

Erro 1. Na linha 9, a justificação está errada (mas não tem influência na demonstração). Deveria ser

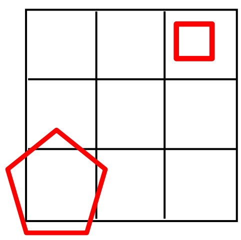
Elim ∃: 3, 4 – 8.

Erro 2. O erro principal ocorre na linha 8, já que as fórmulas

∃x ¬ Small(x). e **∃x Small(x)**

NÃO são contraditórias!

b) Apresente no quadro em baixo um contraexemplo que mostre que o argumento não é válido.



5. (2 val) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

```
1 | ∀x (¬ Cube(x) ∨ Small(x))
2 | ∀x (Tet(x) → Medium(x))
  |--------------------------------
3 | ¬ ∃x (Large(x) ∧ ¬ Dodec(x))
```

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário utilizar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

Nota: 2 respostas erradas cancelam uma resposta certa, mas a classificação da questão nunca será negativa.

- [ ] ∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))
- [X] ¬ ∃x (Large(x) ∧ Medium(x))
- [X] ¬ ∃x (Large(x) ∧ Small(x))
- [ ] ¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))
- [X] ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
- [ ] ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))
- [ ] ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))
- [ ] ¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))

6. (5 val) Valide o seguinte argumento apresentando a respetiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

```
1   | ¬ ∃x ∃y LeftOf(x,y)
2   | ∀x ∀y ((Cube(x)∧ Tet(y)) → LeftOf(x,y))
    |------------------------------------------
3   | | ∃x Cube
    | |-----------------
4   | | | a: Cube(a)
    | | |---------------
5   | | | | ∃y Tet(y)
    | | | |-------------
6   | | | | | b: Tet(b)
    | | | | |-----------
7   | | | | | Cube(a) ∧ Tet(b)                      Intr ∧ : 4 , 6
8   | | | | | (Cube(a) ∧ Tet(b)) → LeftOf(a,b)      Elim ∀ : 2 (2x)
9   | | | | | LeftOf(a,b)                           Elim →: 7 , 8
10  | | | | | ∃x ∃y LeftOf(x,y)                     Intr ∃ : 9 (2x)
11  | | | | | ⊥                                     Intr ⊥ : 1 , 10
12  | | | | ⊥                                       Elim ∃ : 5 , 6 - 11
13  | | | ¬ ∃y Tet(y)                               Intr ¬ : 5 - 12
14. | | ¬ ∃y Tet(y)                                 Elim ∃ : 3 , 4 - 13
15  | ∃x Cube(x) → ¬ ∃y Tet(y)                      Intr →: 3 - 14
```