

# Lógica Computacional

Duração: 1h

## Época de 2021 / 22 – 2.º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:

n.º:

1. (2 val) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Um dos blocos **a** e **b** é um cubo se o bloco **c** também fôr um cubo.

$$\text{Cube}(c) \rightarrow (\text{Cube}(a) \vee \text{Cube}(b))$$

b) O bloco **b** é grande apenas se nenhum dos blocos **a** e **c** o forem (grandes).

$$\text{Large}(b) \rightarrow (\neg \text{Large}(a) \wedge \neg \text{Large}(c))$$

c) O bloco **a** está à frente do bloco **b**, a menos que este esteja atrás do **c**.

$$\neg \text{BackOf}(b, c) \rightarrow \text{FrontOf}(a, b)$$

d) Os blocos **b** e **c** ou são ambos tetraedros, ou então nenhum deles o é.

$$\text{Tet}(b) \leftrightarrow \text{Tet}(c)$$

2. (2 val) Dada a equivalência de fórmulas com operadores de implicação e de equivalência e de disjunção, converta as fórmulas abaixo para uma das formas normais, conjuntiva (CNF) ou disjuntiva (DNF).

a)  $A \rightarrow \neg(C \rightarrow B)$ .

$$\begin{aligned} & \neg A \vee \neg(\neg C \vee B) \\ \Leftrightarrow & (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \end{aligned}$$

b)  $(A \rightarrow \neg C) \rightarrow B$

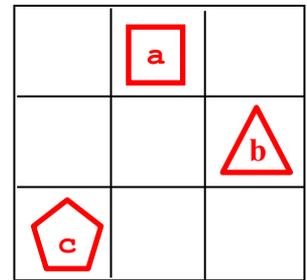
$$\begin{aligned} & \neg(\neg A \vee \neg C) \vee B \\ \Leftrightarrow & (A \vee B) \wedge (C \vee B) \end{aligned}$$

c)  $(A \rightarrow B) \leftrightarrow C$

$$\begin{aligned} & (\neg(\neg A \vee B) \vee C) \wedge (\neg C \vee (\neg A \vee B)) \\ \Leftrightarrow & (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \end{aligned}$$

3. (3.5 val) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de  $3 \times 3$  casas) e desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1.  $\neg \text{Cube}(a) \rightarrow \text{SameCol}(b,c)$
2.  $\text{LeftOf}(a,b) \wedge \text{RightOf}(a,c)$
3.  $\neg \text{Sameshape}(b,c) \wedge \text{FrontOf}(c,b)$
4.  $\neg (\text{BackOf}(a,b) \rightarrow \text{Dodec}(b))$
5.  $\neg (\text{Sameshape}(a,b) \vee \text{Tet}(c))$



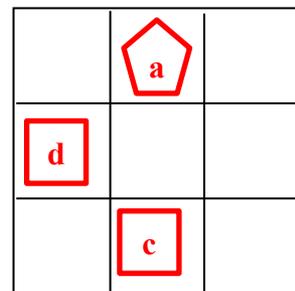
4. (5.0 val) Complete a demonstração abaixo, indicando as fórmulas e as justificações em falta nas caixas em branco.

1	$A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)$		
2	$C \rightarrow D$		
3	$\neg D$		
4	$\neg (\neg A \vee B)$		
5	$\neg A$		
6	$\neg A \vee B$	$\text{Intr } \vee : 5$	
7	$\perp$	$\text{Intr } \perp : 4, 6$	
8	$\neg \neg A$	$\text{Intr } \neg : 5 - 7$	
9	$A$	$\text{Elim } \neg : 8$	
10	$\neg B \rightarrow C$	$\text{Elim } \rightarrow : 1, 9$	
11	$\neg B$		
12	$C$	$\text{Elim } \rightarrow : 10, 11$	
13	$D$	$\text{Elim } \rightarrow : 2, 12$	
14	$\perp$	$\text{Intr } \perp : 3, 13$	
15	$\neg \neg B$	$\text{Intr } \neg : 11 - 14$	
16	$B$	$\text{Elim } \neg : 15$	
17	$\neg A \vee B$	$\text{Intr } \vee : 16$	
18	$\perp$	$\text{Intr } \perp : 4, 17$	
19	$\neg \neg (\neg A \vee B)$	$\text{Intr } \neg : 4 - 18$	
20.	$\neg A \vee B$	$\text{Elim } \neg : 19$	
21.	$\neg D \rightarrow (\neg A \vee B)$	$\text{Intr } \rightarrow : 3, 20$	

5. (2.5 val) Considere o seguinte argumento e sua demonstração (usando a linguagem de Tarski).

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas.

1.	$\text{Cube}(d) \rightarrow \text{Cube}(c)$	
2.	$\neg \text{Cube}(c) \rightarrow (\text{Tet}(b) \rightarrow \neg \text{Dodec}(a))$	
3.	$\text{Cube}(d)$	
4.	$\neg \text{Cube}(c)$	
5.	$\text{Cube}(c)$	Elim $\rightarrow$ : 1 , 4
6.	$\perp$	Intr $\perp$ : 4 , 5
7.	$\text{Tet}(b)$	Elim $\perp$ : 6
8.	$\neg \text{Cube}(c) \rightarrow \text{Tet}(b)$	Intr $\rightarrow$ : 4 - 7
9.	<del><math>\neg \text{Dodec}(a)</math></del>	Elim $\rightarrow$ : 2 , 8
10.	$\text{Cube}(d) \rightarrow \neg \text{Dodec}(a)$	Intr $\rightarrow$ : 3 - 9



Existe um erro na demonstração na linha 9. De uma fórmula do tipo  $A \rightarrow B$  (como a da linha 8) só se poderia inferir  $C$ , se se tivesse adicionalmente uma fórmula  $X: (A \rightarrow B) \rightarrow C$ , e não uma fórmula como a da linha 2:  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ , pois as fórmulas  $X$  e 2 não são equivalentes.

De facto, um cenário em que  $c$  e  $d$  sejam cubos torna ambas as premissas verdadeiras. Mas se  $a$  for um dodecaedro a conclusão é falsa. Logo, no contraexemplo com o dodecaedro  $a$  e os cubos  $c$  e  $d$  (qualquer que seja a forma de  $b$ ) as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa, pelo que o argumento não é válido.

b) Indique no tabuleiro ao lado da demonstração, um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido.

6. (5.0 val) Mostre que o argumento abaixo é válido, apresentando a respectiva demonstração.

1	$\neg C \rightarrow \neg (A \vee B)$	
2	$(A \wedge C) \rightarrow B$	
3	$A$	
4	$A \vee B$	Intr $\vee$ : 3
5	$\neg C$	
6	$\neg (A \vee B)$	Elim $\rightarrow$ : 1, 5
7	$\perp$	Intr $\perp$ : 4, 6
8	$\neg \neg C$	Intr $\neg$ : 5 - 7
9	$C$	Elim $\neg$ : 8
10	$A \wedge C$	Intr $\wedge$ : 3, 9
11	$B$	Elim $\rightarrow$ : 2, 10
12	$A \rightarrow B$	Intr $\rightarrow$ : 3 - 11