

Lógica Computacional

- A Resolução como Regra de Inferência
- O Sistema de Dedução \mathcal{R}_P
- Coerência e Completude do Sistema \mathcal{R}_P

Resolução

- O algoritmo **Horn-SAT** é coerente e completo no sentido que decide deterministicamente se um conjunto **S** de cláusulas de **Horn** é satisfazível. Além disso é bastante eficiente, sendo polinomial no número de cláusulas.
- Como vimos, demonstrar que uma fórmula é uma consequência tautológica de um conjunto de premissas, corresponde a provar, **por absurdo**, que o conjunto de fórmulas obtido pelas premissas e a negação da conclusão é insatisfazível.
- Assim o algoritmo **Horn-SAT** permite demonstrar fórmulas e partir de premissas, ...
mas **apenas** se a representação na forma CNF conduzir a cláusulas Horn.

No caso geral, a forma CNF inclui várias cláusulas *não-Horn* e o algoritmo determinista Horn-SAT não pode ser aplicado.

Para o caso geral pode usar-se o sistema \mathcal{R} de resolução que utiliza apenas uma regra de inferência – a resolução.

Antes de definir essa regra convém lembrar os conceitos e terminologia utilizados.

Regra de Resolução

Cláusula: Uma cláusula é uma disjunção de literais.

Literal: Um literal é um átomo (fórmula atômica) ou a sua negação.

Exemplo: A cláusula $\neg A \vee B \vee \neg C$ tem 1 literal positivo (B) e dois negativos ($\neg A$ e $\neg C$)

Regra de Resolução:

- A partir de duas cláusulas C_1 e C_2 em que uma contem um literal positivo L e outra o literal negativo $\neg L$, pode inferir-se outra cláusula, denominada **resolvente**, composta por todos os literais de C_1 e de C_2 , excepto L e $\neg L$.

Exemplo: As cláusulas

$$\neg A \vee B \vee \neg C \qquad \text{e} \qquad \neg A \vee C \vee D$$

podem ser resolvidas em ordem a C obtendo-se a cláusula resolvente

$$\neg A \vee B \vee \neg A \vee D$$

que se pode simplificar para

$$\neg A \vee B \vee D$$

Nota: Um cláusula pode ser definida como um conjunto de literais, o que torna “automática” a sua simplificação, isto é

$$\neg A \vee B \vee \neg A \vee D \equiv \{\neg A, B, D\}$$

Coerência da Resolução

Teorema : A regra de resolução é **coerente**

- Este teorema declara que para todas as interpretações em que as cláusulas resolvidas sejam verdadeiras a resolvente também o é.
- A sua demonstração é imediata. Considerem-se as duas cláusulas

$$A \vee \varphi \quad \text{e} \quad \neg A \vee \psi$$

em que φ e ψ são cláusulas arbitrárias. Ora o átomo A ou é verdadeiro ou é falso. Logo,

- Se A for verdadeiro então ψ também é verdadeira.
 - Se A for falso, então φ tem de ser verdadeira.
- Desta forma ou φ ou ψ são verdadeiras e portanto a cláusula $\varphi \vee \psi$ é verdadeira, ficando assim demonstrada a coerência da regra da resolução.

Sistema de Resolução \mathcal{R}

Sistema de Resolução \mathcal{R}_p

- Sistema de Resolução \mathcal{R}_p (proposicional) tem as seguintes características:
 1. Deduz uma fórmula φ de premissas Φ ($\Phi \vdash \varphi$) por **absurdo**, isto é demonstra que o conjunto $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfazível, deduzindo a contradição \perp a partir do conjunto de fórmulas $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$.
 2. Todas as fórmulas utilizadas são cláusulas, ou seja disjunções de literais, se necessário convertendo as fórmulas $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ na forma CNF.
 3. A única regra de inferência utilizada é a resolução .

Nota: No contexto do sistema \mathcal{R} , a contradição \perp é obtida através de uma **cláusula vazia**. De facto, \perp obtém-se de duas cláusulas \mathbf{A} e $\neg\mathbf{A}$, e portanto a cláusula resolvente é **vazia**, isto é, não contem nenhuns literais. Esta **cláusula vazia**, é geralmente denotada pelo símbolo \square .

Resolução

- Alguns exemplos simples permitem perceber que a regra de resolução permite implementar algumas regras de inferência conhecidas

Modus Ponens: $\{A \rightarrow B, A\} \mid -_{\mathcal{R}} B$

1.	$\neg A \vee B$	
2.	A	
3.	$\neg B$	
4.	$\neg A$	Res 1, 3
5.	\square	Res 2, 4

Modus Tolens: $\{A \rightarrow B, \neg B\} \mid -_{\mathcal{R}} \neg A$

1.	$\neg A \vee B$	
2.	$\neg B$	
3.	A	
4.	B	Res 1, 3
5.	\square	Res 2, 4

Raciocínio Hipotético: $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \mid -_{\mathcal{R}} A \rightarrow C$

1.	$\neg A \vee B$	
2.	$\neg B \vee C$	
3.	A	
4.	$\neg C$	
5.	B	Res 1, 3
6.	C	Res 2, 5
7.	\square	Res 4, 6

Resolução Linear

- De notar que a regra de resolução não permite resolver duas cláusulas em mais do que um literal. Caso contrário a regra não seria coerente.
- O exemplo abaixo ilustra claramente a situação

$$\{A \leftrightarrow \neg B\} \mid \neg C \quad ???$$

1.		$\neg A \vee \neg B$	
2.		$A \vee B$	
3.		$\neg C$	
4.		\square	Res 1, 2 ???

- Podemos agora ilustrar o funcionamento do sistema de Resolução com um exemplo mais complexo

Sistema de Resolução

Exemplo: $\{\neg(B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge D)\}, A \rightarrow B, \neg A \vee D \mid \neg_{\mathcal{R}} \neg A$

Passo 1: Criar as cláusulas a partir das premissas e negação da conclusão.

$$\begin{aligned} \neg(B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge D) &\Leftrightarrow \\ ((B \vee C) \vee (A \wedge D)) \wedge (\neg(A \wedge D) \vee \neg(B \vee C)) &\Leftrightarrow \\ (B \vee C \vee A) \wedge (B \vee C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg D) \vee (\neg B \wedge \neg C) &\Leftrightarrow \\ (B \vee C \vee A) \wedge (B \vee C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg D \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg D \vee \neg C) &\Leftrightarrow \\ (A \vee B \vee C) \wedge (B \vee C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee \neg D) & \end{aligned}$$

- Ficamos pois com as cláusulas

$$A \vee B \vee C$$

$$B \vee C \vee D$$

$$\neg A \vee \neg B \vee \neg D$$

$$\neg A \vee \neg C \vee \neg D$$

para além das cláusulas correspondentes às outras premissas

$$\neg A \vee B$$

$$\neg A \vee D$$

e da cláusula correspondente à negação da conclusão

A

Sistema de Resolução

- Uma vez obtidas as cláusulas, pode fazer-se a demonstração por resolução.

1.	$A \vee B \vee C$		
2.	$B \vee C \vee D$		
3.	$\neg A \vee \neg B \vee \neg D$	$\frac{\neg A \vee D \quad A}{D}$ 8	$\frac{\neg A \vee \neg B \vee \neg D \quad \neg A \vee B}{\neg A \vee \neg D}$ 9
4.	$\neg A \vee \neg C \vee \neg D$		$\frac{\neg A \vee \neg D \quad A}{\neg D}$ 10
5.	$\neg A \vee B$		$\frac{D \quad \neg D}{\square}$ 11
6.	$\neg A \vee D$		
7.	A		
8.	D	Res	6, 7
9.	$\neg A \vee \neg D$	Res	3, 5
10.	$\neg D$	Res	7, 9
11.	\square	Res	8, 10

- De notar que esta demonstração não é única.
- Além disso, não segue uma heurística óbvia para escolher em cada passo as cláusulas a resolver, obrigando a uma visão global de todas as cláusulas para decidir o que fazer.
- No entanto existe uma estratégia de resolução, a **resolução linear**, que limita as escolhas a fazer e permite uma implementação computacional mais adequada.

Resolução Linear

- Na **resolução linear**, uma das cláusulas a resolver é a **última** obtida. Por exemplo,

1.	$A \vee B \vee C$	
2.	$B \vee C \vee D$	
3.	$\neg A \vee \neg B \vee \neg D$	
4.	$\neg A \vee \neg C \vee \neg D$	
5.	$\neg A \vee B$	
6.	$\neg A \vee D$	
7.	A	
8.	B	Res 7 , 5
9.	$\neg A \vee \neg D$	Res 8 , 3
10.	$\neg A$	Res 9 , 6
11.	\square	Res 10 , 7

A	$\neg A \vee B$	
		8
B	$A \vee \neg B \vee \neg D$	
		9
$\neg A \vee \neg D$	$\neg A \vee D$	
		10
$\neg A$	A	
		11
\square		

- Nota: Pode haver mais de uma demonstração linear.

8.	D	Res 7 , 6
9.	$\neg A \vee \neg B$	Res 8 , 3
10.	$\neg B$	Res 9 , 7
11.	$\neg A$	Res 10 , 5
11.	\square	Res 11 , 7

A	$\neg A \vee D$	
		8
D	$\neg A \vee \neg B \vee \neg D$	
		9
$\neg A \vee \neg B$	A	
		10
$\neg B$	$\neg A \vee B$	
		11
$\neg A$	A	
		12
\square		

Completude e Coerência do Sistema \mathcal{R}_p

- Como observado no exemplo, existem normalmente várias possíveis sequências de demonstração da cláusulas vazia.
- Nos exemplos conseguimos sempre obter a cláusula vazia sempre que as cláusulas iniciais fossem contraditórias. No entanto coloca-se a questão de saber se isto é sempre possível, isto é se o sistema \mathcal{R}_p é completo. Esta questão é resolvida pelo seguinte

Teorema: O sistema \mathcal{R}_p é coerente e completo.

A demonstração de que o sistema \mathcal{R}_p é coerente é imediata. A única regra utilizada é a regra da resolução e vimos atrás que a regra é coerente.

A demonstração de que \mathcal{R}_p é completo pode ser feita por indução, no número de átomos existentes no conjunto S de cláusulas insatisfazível (contraditórias).

Passo Base: Se S só contem um literal e é insatisfazível, então a cláusula vazia é obtida por resolução.

- Para ser insatisfazível, S tem de ser $\{A, \neg A\}$ pelo que resolvendo as duas cláusulas se obtém a cláusula vazia.

Completude e Coerência do Sistema \mathcal{R}

Passo de Indução: Se se obtém a cláusula vazia por resolução num conjunto insatisfazível de cláusulas \mathbf{S}_n com n átomos distintos, então a cláusula vazia também se obtém por resolução dum conjunto insatisfazível, \mathbf{S}_{n+1} , com $n+1$ átomos distintos.

A demonstração desta cláusula faz-se obtendo uma cobertura de \mathbf{S}_{n+1} por dois conjuntos de cláusulas \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 , ou seja por conjuntos tais que $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{X}_2 = \mathbf{S}_{n+1}$ e demonstrando que

- i. existe um conjunto $\mathbf{X}_0 \subseteq \mathbf{S}_n$, com n átomos distintos, que é insatisfazível; ou
- ii. aplicando resolução a $\mathbf{X}_1 / \mathbf{X}_2$ se podem obter cláusulas constituídas exclusivamente pelos átomos $\mathbf{A}_{n+1} / \neg\mathbf{A}_{n+1}$.

Uma vez demonstrados estes pressupostos, é fácil de ver que aplicando resolução ao conjunto \mathbf{S}_{n+1} se pode obter a cláusula vazia. Com efeito,

- i. Neste caso, pela hipótese de indução, a cláusula vazia é obtida, pois o conjunto $\mathbf{X}_0 \subseteq \mathbf{S}_n$ só contem n átomos distintos:
- ii. Neste caso, juntam-se as duas demonstrações onde se obtêm as cláusulas \mathbf{A}_{n+1} a partir de \mathbf{X}_1 e $\neg\mathbf{A}_{n+1}$ a partir de \mathbf{X}_2 , resolvendo-se essas cláusulas entre si, assim se obtendo a cláusula vazia.

Completude e Coerência do Sistema \mathcal{R}

Demonstremos agora os pressupostos anteriores. Os conjuntos X_1 e X_2 que constituem uma cobertura de S_{n+1} são construídos da seguinte forma:

- X^+ é composto por todas as cláusulas que contêm o literal A_{n+1} ;
- X^- é composto por todas as cláusulas que contêm o literal $\neg A_{n+1}$;
- X_0 é composto por todas as cláusulas que não contêm os literais A_{n+1} e $\neg A_{n+1}$.
- $X_1 = X^+ \cup X_0$ e $X_2 = X^- \cup X_0$

Exemplo (em que C é o átomo A_{n+1})

$$S_3 = \{A \vee B, A \vee C, A \vee \neg B \vee \neg C, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$X^+ = \{A \vee C\} ;$$

$$X^- = \{A \vee \neg B \vee \neg C\} ;$$

$$X_0 = \{A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\} ;$$

$$X_1 = \{A \vee C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$X_2 = \{A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

Completude e Coerência do Sistema \mathcal{R}

Exemplo:

$$\mathbf{S}_3 = \{A \vee B, A \vee C, A \vee \neg B \vee \neg C, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$\mathbf{X}^+ = \{A \vee C\} ;$$

$$\mathbf{X}^- = \{A \vee \neg B \vee \neg C\} ;$$

$$\mathbf{X}_0 = \{A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\} ;$$

$$\mathbf{X}_1 = \{A \vee C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$\mathbf{X}_2 = \{A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

Naturalmente, se o conjunto \mathbf{X}_0 for insatisfazível, quer \mathbf{X}_1 quer \mathbf{X}_2 são insatisfazíveis. Mas neste caso, como \mathbf{X}_0 tem apenas n átomos, pela hipótese de indução a cláusula vazia pode ser obtida.

No exemplo acima, o conjunto \mathbf{X}_0 não é insatisfazível. Com efeito ele é satisfeito para a interpretação $\{A = F, B = V\}$.

Neste exemplo, deveremos então provar que de \mathbf{X}_1 se obtem a cláusula C e de \mathbf{X}_2 se obtem a cláusula $\neg C$, pelo que resolvendo-as se obtem a cláusula vazia.

Completude e Coerência do Sistema \mathcal{R}

Exemplo:

$$\mathbf{S}_3 = \{A \vee B, A \vee C, A \vee \neg B \vee \neg C, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$\mathbf{X}^+ = \{A \vee C\} ;$$

$$\mathbf{X}^- = \{A \vee \neg B \vee \neg C\} ;$$

$$\mathbf{X}_0 = \{A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\} ;$$

$$\mathbf{X}_1 = \{A \vee C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$\mathbf{X}_2 = \{A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

Sendo \mathbf{S}_{n+1} insatisfazível e quando, como é o caso, o conjunto \mathbf{X}_0 não é insatisfazível, então

- a atribuição do valor \mathbf{V} a \mathbf{A}_{n+1} ($\mathbf{C} = \mathbf{V}$ no exemplo), torna \mathbf{X}_2 insatisfazível; e
- a atribuição do valor \mathbf{F} a \mathbf{A}_{n+1} ($\mathbf{C} = \mathbf{F}$ no exemplo), torna \mathbf{X}_1 insatisfazível.

De facto,

- se $\mathbf{C} = \mathbf{V}$, as cláusulas de \mathbf{X}^+ tornam-se todas **Verdade** e como \mathbf{X}_0 não é insatisfazível, então a insatisfazibilidade de \mathbf{S}_{n+1} terá de ocorrer no conjunto \mathbf{X}_2 , e
- se $\mathbf{C} = \mathbf{F}$, as cláusulas de \mathbf{X}^- tornam-se todas **Verdade** e como \mathbf{X}_0 não é insatisfazível, então a insatisfazibilidade de \mathbf{S}_{n+1} terá de ocorrer no conjunto \mathbf{X}_1 .

Completude e Coerência do Sistema \mathcal{R}

Exemplo:

$$S_3 = \{A \vee B, A \vee C, A \vee \neg B \vee \neg C, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$X^+ = \{A \vee C\} ;$$

$$X^- = \{A \vee \neg B \vee \neg C\} ;$$

$$X^0 = \{A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\} ;$$

$$X_1 = \{A \vee C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$X_2 = \{A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

- Consideremos os conjuntos Y_1 / Y_2 resultantes de se apagarem os literais $A_{n+1} / \neg A_{n+1}$ das cláusulas de X_1 / X_2 . No exemplo, (em que C é o A_{n+1}) teríamos

$$Y_1 = \{A \vee C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$Y_2 = \{A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

- Se assumimos $A_{n+1} = V$ então $\neg A_{n+1} = F$, e o valor de verdade das cláusulas de Y_2 não se altera em relação a X_2 ; logo se X_2 é insatisfazível, Y_2 também o é.
- Se assumimos $A_{n+1} = F$ então o valor de verdade das cláusulas de Y_1 não se altera em relação a X_1 ; logo se X_1 é insatisfazível Y_1 também o é.

Completude e Coerência do Sistema \mathcal{R}

Exemplo:

$$S_3 = \{A \vee B, A \vee C, A \vee \neg B \vee \neg C, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

...

$$X_1 = \{A \vee C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$X_2 = \{A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$Y_1 = \{A \vee C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$Y_2 = \{A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

- Mas como Y_1 / Y_2 contêm apenas n literais (os literais A_{n+1} e $\neg A_{n+1}$ foram apagados de X_1 / X_2) a hipótese de indução garante que de ambos os conjuntos Y_1 / Y_2 se pode obter, por resolução, a cláusula vazia.
- Mas se nas demonstrações utilizadas substituirmos as cláusulas de Y_1 / Y_2 pelas correspondentes de X_1 / X_2 o que obteremos são os literais A_{n+1} e $\neg A_{n+1}$, pois serão usadas cláusulas que os contêm e eles não podem ser resolvidos com os literais complementares.

Completude e Coerência do Sistema \mathcal{R}

Exemplo:

- O raciocínio anterior pode ser ilustrado com o conjunto insatisfazível

$$S_3 = \{A \vee B, A \vee C, A \vee \neg B \vee \neg C, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

a partir do qual se construiram os conjuntos

$$X_1 = \{A \vee C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

$$X_2 = \{A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$$

- No exemplo podem demonstrar-se a cláusula C a partir de X_1 e a cláusula $\neg C$ de X_2 .

1.	$A \vee C$	
2.	$A \vee B$	
3.	$\neg A \vee B$	
4.	$\neg A \vee \neg B$	
5.	$\neg A$	Res 4, 3
6.	C	Res 5, 1

1.	$A \vee \neg B \vee \neg C$	
2.	$A \vee B$	
3.	$\neg A \vee B$	
4.	$\neg A \vee \neg B$	
5.	$\neg A$	Res 4, 3
6.	$\neg B \vee \neg C$	Res 5, 1
7.	$A \vee \neg C$	Res 6, 2
8.	$\neg C$	Res 7, 5

- Como ambas as demonstrações são feitas com subconjuntos de cláusulas de S_{n+1} , elas podem ser feitas a partir do conjunto S_{n+1} , assim se obtendo (de S_{n+1}) as cláusulas A_{n+1} e $\neg A_{n+1}$ que, resolvidas, originam a cláusula vazia, como se pretendia demonstrar.

