

Lógica Computacional

Estratégias de Demonstração no Sistema DN

Regras Heurísticas

Exemplos

Estratégias de Demonstração

- Sendo demonstrável que o sistema DN é coerente e completo, existe a garantia de que qualquer consequência-lógica (FO) é demonstrável no sistema DN.
- No entanto, esta garantia não fornece pistas sobre como podem ser obtidas essas demonstrações.
- Embora não existam procedimentos determinísticos, existem heurísticas que geralmente guiam de uma forma conveniente as demonstrações e indicam quais as regras do sistema a utilizar em cada instante.
- Para além das regras indicadas para o sistema DNp (sem quantificadores) podem incluir-se
 - Se a fórmula a demonstrar é universalmente quantificada utilizar a regras de introdução do \forall
 - Se já existe uma fórmula existencialmente quantificada utilizar a regras de eliminação do \exists .
 - Nos casos em que não existem outras pistas, tentar o raciocínio por absurdo
- Alguns exemplos irão ilustrar a estratégia a utilizar

Estratégias de Demonstração

Exemplo:

$$\{ \forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{LeftOf}(x, a)), \forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{RightOf}(x, a)) \}$$
$$\vdash_{\text{DN}} \forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$$

1		$\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{LeftOf}(x, a))$
2		$\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{RightOf}(x, a))$
<hr/>		
		$\forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$

- Para demonstrar a conclusão exclusivamente através de regras do sistema DN, teremos de incluir nas premissas conhecimento sobre o mundo dos blocos, nomeadamente:

- Estar na mesma coluna é incompatível com estar à direita
- Estar na mesma coluna é incompatível com estar à esquerda
- Só existem três formas: tetraedro, cubo e dodecaedro

Estratégias de Demonstração

- Este conhecimento está expresso nos axiomas de Tarski que são adicionados como premissas na demonstração.

a1	$\forall x (\text{Tet}(x) \vee \text{Cube}(x) \vee \text{Dodec}(x))$
a2	$\forall x \forall y \neg (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{LeftOf}(x, y))$
a3	$\forall x \forall y \neg (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{RightOf}(x, y))$
1	$\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{LeftOf}(x, a))$
2	$\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{RightOf}(x, a))$
<hr/>	
30	$\forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$

- A partir deste momento, a demonstração faz-se exclusivamente através de regras do sistema DN.
- Para esse efeito é conveniente utilizar algumas regras heurísticas para obter a demonstração pretendida, como se fará de seguida.

Estratégias de Demonstração

- Sendo a frase a demonstrar universalmente quantificada, deverá utilizar-se a regra da introdução do \forall . Assim
 - Linha 3: assume-se a existência de um objecto, c , arbitrário
 - Linha 29: obtém-se a fórmula pretendida nesse objecto
 - Linha 30: justifica-se a fórmula obtida

```
a1 |  $\forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$ 
a2 |  $\forall x \forall y \neg (SameCol(x,y) \wedge LeftOf(x,y))$ 
a3 |  $\forall x \forall y \neg (SameCol(x,y) \wedge RightOf(x,y))$ 
1  |  $\forall x (Dodec(x) \rightarrow LeftOf(x, a))$ 
2  |  $\forall x (Tet(x) \rightarrow RightOf(x, a))$ 
3  | -----
   | | c:
   | | -----
   | | ...
29 | | SameCol(c, a)  $\rightarrow$  Cube(c)
30 | |  $\forall x (SameCol(x, a) \rightarrow Cube(x))$  Intr  $\forall$ : 3 - 29
```

Estratégias de Demonstração

- Sendo a frase a demonstrar na linha 29 uma implicação, deverá utilizar-se a regra da introdução do operador \rightarrow . Assim
 - Linha 4: assume-se a existência do implicante
 - Linha 28: obtém-se a fórmula do implicado
 - Linha 29: justifica-se a fórmula obtida

a1		$\forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$	
a2		$\forall x \forall y \neg (SameCol(x, y) \wedge LeftOf(x, y))$	
a3		$\forall x \forall y \neg (SameCol(x, y) \wedge RightOf(x, y))$	
1		$\forall x (Dodec(x) \rightarrow LeftOf(x, a))$	
2		$\forall x (Tet(x) \rightarrow RightOf(x, a))$	
3		c:	
4			SameCol(c, a)
			...
28			Cube(c)
29		$SameCol(c, a) \rightarrow Cube(c)$	Intr \rightarrow : 4 - 28
30		$\forall x (SameCol(x, a) \rightarrow Cube(x))$	Intr \forall : 3 - 29

Estratégias de Demonstração

- A estratégia a seguir para demonstrar que c é um cubo (linha 28), passa por :
 - Linha 11: demonstrar que não é um dodecaedro
 - Linha 18: demonstrar que não é um tetraedro

```
a1  |   $\forall x ((Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$ 
a2  |   $\forall x \forall y \neg (SameCol(x,y) \wedge LeftOf(x,y))$ 
a3  |   $\forall x \forall y \neg (SameCol(x,y) \wedge RightOf(x,y))$ 
1   |   $\forall x (Dodec(x) \rightarrow LeftOf(x, a))$ 
2   |   $\forall x (Tet(x) \rightarrow RightOf(x, a))$ 
-----
3   |  |  c:
4   |  |  |   $SameCol(c, a)$ 
    |  |  |  ...
11  |  |  |   $\neg Dodec(c)$ 
    |  |  |  ...
18  |  |  |   $\neg Tet(c)$ 
    |  |  |  ...
28  |  |  |   $Cube(c)$ 
29  |  |  |   $SameCol(c, a) \rightarrow Cube(c)$       Intr  $\rightarrow$  : 4 - 28
30  |  |  |   $\forall x (SameCol(x, a) \rightarrow Cube(x))$   Intr  $\forall$ : 3 - 29
```

Estratégias de Demonstração

- A demonstração de que c não é um dodecaedro pode fazer-se por *Modus Tollens* (na implicação da linha 1) e por absurdo (com a instanciação do axioma **a2** na linha 5)

a2	$\forall x \forall y \neg (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{LeftOf}(x, y))$	
1	$\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{LeftOf}(x, a))$	
<div style="text-align: center;">...</div>		
4	$\text{SameCol}(c, a)$	
5	$\neg (\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{LeftOf}(c, a))$	Elim \forall : a2 (2X)
6	$\text{Dodec}(c)$	
7	$\text{Dodec}(c) \rightarrow \text{LeftOf}(c, a)$	Elim \forall : 1
8	$\text{LeftOf}(c, a)$	Elim \rightarrow : 6 , 7
9	$\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{LeftOf}(c, a)$	Intr \wedge : 4 , 8
10	\perp	Intr \perp : 5 - 9
11	$\neg \text{Dodec}(c)$	Intr \neg : 6 - 10
<div style="text-align: center;">...</div>		
30	$\forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$	

Estratégias de Demonstração

- A demonstração de que c não é um tetraedro é semelhante e passa utiliza o *Modus Tollens* (na implicação da linha 2) e o absurdo (com a instanciação do axioma **a3** na linha 12)

a3	$\forall x \forall y \neg (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{RightOf}(x, y))$	
2	$\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{RightOf}(x, a))$	
1	...	
4	$\text{SameCol}(c, a)$	
5	$\neg (\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{RightOf}(c, a))$	Elim \forall : a3 (2X)
12	$\text{Tet}(c)$	
13	$\text{Tet}(c) \rightarrow \text{RightOf}(c, a)$	Elim \forall : 2
14	$\text{RightOf}(c, a)$	Elim \rightarrow : 12 , 13
15	$\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{RightOf}(c, a)$	Intr \wedge : 4 , 14
16	\perp	Intr \perp : 5 , 15
18	$\neg \text{Tet}(c)$	Intr \neg : 13 - 16
	...	
30	$\forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$	

Estratégias de Demonstração

- Finalmente a demonstração de que **c** é um cubo faz-se através do raciocínio por casos, a partir da disjunção obtida na linha 19 por instanciação do axioma **a1**.

a1	$\forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$	
11	$\neg Dodec(c)$	
18	$\neg Tet(c)$	
19	$Tet(c) \vee Cube(c) \vee Dodec(c)$	Elim \forall : a1
20	$Tet(c)$	
21	\perp	Intr \perp : 18 , 20
22	$Cube(c)$	Elim \perp : 21
23	$Cube(c)$	
24	$Cube(c)$	Reit : 23
25	$Dodec(c)$	
26	\perp	Intr \perp : 11 , 25
27	$Cube(c)$	Elim \perp : 26
28	$Cube(c)$	Elim : 19, 20-22 , 23 -24, 25-27
	\dots	

Estratégias de Demonstração

Exemplo 2: $\{ \exists x \forall y G(y, x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall y \exists x G(y, x)$

- Sabendo que existe um objecto com uma dada propriedade podemos começar por nomeá-lo, e construir a prova por eliminação do \exists .
 - Linhas 2 e 6: Seja **a** o objecto indicado pela linha 1.

1		$\exists x \forall y G(y, x)$	
2		a: $\forall y G(y, a)$	
6		$\forall y \exists x G(y, x)$	
7		$\forall y \exists x G(y, x)$	Elim \exists : 1, 2 - 6

Estratégias de Demonstração

Exemplo 2: $\{ \exists x \forall y G(y, x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall y \exists x G(y, x)$

- Sendo a fórmula 6 a demonstrar universalmente quantificada, deverá utilizar-se a regra da introdução do \forall . Assim
 - Linha 3: assume-se a existência de um objecto, **b**, arbitrário
 - Linha 5: obtém-se a fórmula pretendida nesse objecto

1	$\exists x \forall y G(y, x)$	
2	$a: \forall y G(y, a)$	
3	b:	
5	$\exists x G(b, x)$	
6	$\forall y \exists x G(y, x)$	Intr \forall : 3 - 5
7	$\forall y \exists x G(y, x)$	Elim \exists : 1, 2 - 6

Estratégias de Demonstração

Exemplo 2: $\{ \exists x \forall y G(y, x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall y \exists x G(y, x)$

- Finalmente, para obter a fórmula 5 teremos de obter a relação P entre algum bloco e o bloco **b**. Mas esse objecto pode ser o bloco **a**.

- Linha 4: instancia-se a fórmula quantificada universalmente em 2.

1		$\exists x \forall y G(y, x)$			
2			$a: \forall y G(y, a)$		
3				$b:$	
4				$G(b, a)$	Elim \forall : 2
5				$\exists x G(b, x)$	Intr \exists : 4
6			$\forall y \exists x G(y, x)$	Intr \forall : 1, 2 - 6	
7		$\forall y \exists x G(y, x)$	Elim \exists : 1, 2 - 6		

- Uma vez feita esta demonstração podemos igualmente demonstrar a sua “contrapositiva”.

Estratégias de Demonstração

Exemplo 3: $\{\neg\forall y \exists x G(y, x)\} \vdash_{\text{DN}} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Pretendendo obter uma fórmula negada, deveremos usar a regra de Introdução da \neg .
 - Linha 2 e 9: assume-se a negação da fórmula e obtem-se a \perp

1		$\neg \forall y \exists x G(y, x)$	
2		$\exists x \forall y G(y, x)$	
		...	
9		\perp	
10		$\neg \exists x \forall y G(y, x)$	Intr \neg : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 3: $\{\neg\forall y \exists x G(y, x)\} \mid \neg_{DN} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Havendo um objecto com uma dada propriedade (linha 2) podemos nomeá-lo.
 - Seja **a** o objecto indicado pela linha 2.

1		$\neg \forall y \exists x G(y, x)$		
2			$\exists x \forall y G(y, x)$	
3				a: $\forall y G(y, a)$
9				\perp
10		$\neg \exists x \forall y G(y, x)$		Intr \neg : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 3: $\{ \neg \forall y \exists x G(y, x) \} \mid \neg_{DN} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- A contradição em 9 advém do bloco a estar em P com todos os blocos e a fórmula 1 que diz que não existe nenhum bloco para o qual não existem blocos em P com ele.
 - Linha 8: Obtenha-se a contradição da fórmula 1

1	$\neg \forall y \exists x G(y, x)$	
2	$\exists x \forall y G(y, x)$	
3	$a: \forall y G(y, a)$	
	...	
8	$\forall y \exists x G(y, x)$	
9	\perp	Intr \perp : 1 - 8
10	$\neg \exists x \forall y G(y, x)$	Intr \neg : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 3: $\{\neg\forall y \exists x G(y, x)\} \mid \neg_{DN} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Querendo obter em 8 uma fórmula que não contem o nome **a**, essa fórmula deverá ser obtida por eliminação do \exists .
 - Obtenha-se a fórmula sem o nome **a** em 7

1	$\neg \forall y \exists x G(y, x)$	
2	$\exists x \forall y G(y, x)$	
3	$a: \forall y G(y, a)$	
	...	
7	$\forall y \exists x G(y, x)$	
8	$\forall y \exists x G(y, x)$	Elim \exists : 2 , 3 - 7
9	\perp	Intr \perp : 1 - 8
10	$\neg \exists x \forall y G(y, x)$	Intr \neg : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 3: $\{ \neg \forall y \exists x G(y, x) \} \mid \neg_{DN} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Em 7 pretende-se uma fórmula quantificada universalmente, pelo que deverá ser usada a regra de Introdução do \forall .
 - Assume-se **b** arbitrário em 4, e
 - Obtém-se a fórmula nesse nome em 6

1	$\neg \forall y \exists x G(y, x)$	
2	$\exists x \forall y G(y, x)$	
3	$a: \forall y G(y, a)$	
4	$b:$	
6	$\exists x G(b, x)$	
7	$\forall y \exists x G(y, x)$	Intr\forall : 4 - 6
8	$\forall y \exists x G(y, x)$	Elim\exists : 1 , 2 - 7
9	\perp	Intr\perp : 1 - 8
10	$\neg \exists x \forall y G(y, x)$	Intr\neg : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 3: $\{ \neg \forall y \exists x G(y, x) \} \mid \neg_{DN} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Para se obter a fórmula 6 teremos de obter a relação P entre um objecto e **b**. Mas esse objecto pode ser o objecto **a**, obtido por instanciação do \forall .
 - Elimina-se o \forall em 3

1	$\neg \forall y \exists x G(y, x)$	
2	$\exists x \forall y G(y, x)$	
3	$a: \forall y G(y, a)$	
4	$b:$	
5	$G(b, a)$	Elim \forall : 3
6	$\exists x G(b, x)$	Intr \exists : 5
7	$\forall y \exists x G(y, x)$	Intr \forall : 4 - 6
8	$\forall y \exists x G(y, x)$	Elim \exists : 1 , 2 - 7
9	\perp	Intr \perp : 1 - 8
10	$\neg \exists x \forall y G(y, x)$	Intr \neg : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

- Podemos agora demonstrar resultados referentes a separação de quantificadores.

Exemplo 4: $\{ \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall x (P(x) \vee Q(x))$

- Pretende-se uma fórmula quantificada universalmente, pelo que deverá ser usada a regra de Introdução do \forall .
 - Assume-se um objecto a arbitrário em 2, e
 - Obtem-se a fórmula nesse nome em 9

1		$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$	
2		$a:$	
		
9		$P(a) \vee Q(a)$	
10		$\forall x (P(x) \vee Q(x))$	$\text{Intr } \forall : 2 - 9$

Estratégias de Demonstração

Exemplo 4: $\{ \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall x (P(x) \vee Q(x))$

- A disjunção de a ser P ou Q é uma consequência da disjunção na fórmula 1, que poderemos obter através de cada um dos disjuntos, convenientemente instanciados.
 - Linhas 3 e 6: Assume-se cada um dos disjuntos, e
 - Linhas 5 e 8: Obtém-se a fórmula em ambos os casos

1	$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$	
2	a:	
3	$\forall x P(x)$	
5	$P(a) \vee Q(a)$	
6	$\forall x Q(x)$	
8	$P(a) \vee Q(a)$	
9	$P(a) \vee Q(a)$	Elim \vee : 1 , 3 - 5, 6 - 8
10	$\forall x (P(x) \vee Q(x))$	Intr \forall : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 4: $\{ \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall x (P(x) \vee Q(x))$

- Ambas as disjunções são fórmulas enfraquecidas do que se pode obter por instanciação de cada uma das hipóteses..
 - Linhas 4 e 7: Instanciam-se as hipóteses, e
 - Linhas 5 e 8: Obtem-se a fórmula por introdução da \vee

1	$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$	
2	a:	
3	$\forall x P(x)$	
4	P(a)	Elim \forall : 3
5	P(a) \vee Q(a)	Intr \vee : 4
6	$\forall x Q(x)$	
7	Q(a)	Elim \forall : 6
8	P(a) \vee Q(a)	Intr \vee : 7
9	P(a) \vee Q(a)	Elim \vee : 1 , 3 - 5, 6 - 8
10	$\forall x (P(x) \vee Q(x))$	Intr \forall : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

- Podemos agora demonstrar outro resultado referente a separação de quantificadores.

Exemplo 4: $\{ \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \} \vdash_{\text{DN}} \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

- Pretende-se uma fórmula conjuntiva, pelo que será usada a regra de Introdução da \wedge .
 - Linhas 5 e 9: Obtém-se cada um dos conjuntos
 - Linha 10: Introdúz-se a \wedge

1	$\exists x (P(x) \wedge Q(x))$	
5	$\exists x P(x)$	
9	$\exists x Q(x)$	
10	$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	Intr \wedge : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 4: $\{ \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \} \vdash_{\text{DN}} \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

- Existindo uma fórmula quantificada existencialmente podemos instanciá-la para obter cada uma das fórmulas 5 e 9.
 - Linhas 2 e 6: Atribui-se um nome, **a**, ao objecto existencialmente quantificado
 - Linhas 4 e 8: Obtêm-se as fórmulas 5 e 9, sem o nome atribuído

1	$\exists x (P(x) \wedge Q(x))$	
2	$a: P(a) \wedge Q(a)$	
4	$\exists x P(x)$	
5	$\exists x P(x)$	Elim \exists : 1, 2 - 4
6	$a: P(a) \wedge Q(a)$	
8	$\exists x Q(x)$	
9	$\exists x Q(x)$	Elim \exists : 1, 6 - 8
10	$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	Intr \wedge : 5 - 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 4: $\{ \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \} \vdash_{\text{DN}} \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

- As fórmulas existenciais podem ser obtidas em cada caso por eliminação do disjuncto não relevante e instanciação existencial.
 - Linhas 3 e 7: Eliminam-se as conjunções de 2 e 6
 - Linhas 4 e 8: Introduzem-se os \exists s pretendidos

1	$\exists x (P(x) \wedge Q(x))$	
2	$a: P(a) \wedge Q(a)$	
3	$P(a)$	Elim \wedge : 2
4	$\exists x P(x)$	Intr \exists : 3
5	$\exists x P(x)$	Elim \exists : 1, 2 - 4
6	$a: P(a) \wedge Q(a)$	
7	$Q(a)$	Elim \wedge : 6
8	$\exists x Q(x)$	Intr \exists : 7
9	$\exists x P(x)$	Elim \exists : 1, 6 - 8
10	$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	Intr \wedge : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

- Por último demonstramos as leis de de Morgan de quantificadores (d direcção mais “difícil”)

Exemplo 5: $\{\neg \exists x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \forall x \neg P(x)$

- Apesar de se pretender uma fórmula quantificada universalmente, tentemos fazer uma demonstração por absurdo (na realidade a regra geral conduziria a uma demonstração mais simples; deixa-se como exercício).
 - Linha 2: Assume-se a negação da conclusão
 - Linha 9: Obtém-se o absurdo a fórmula nesse nome em 9
 - Linhas 10 e 11 : Nega-se a hipótese e elimina-se a dupla negação

1		$\neg \exists x P(x)$	
2			$\neg \forall x \neg P(x)$
			...
9			\perp
10		$\neg \neg \forall x \neg P(x)$	Intr \neg : 2 - 9
11		$\forall x \neg P(x)$	Elim \neg : 10

Estratégias de Demonstração

Exemplo 5: $\{\neg \exists x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \forall x \neg P(x)$

- A contradição pode ser obtida obtendo-se a fórmula contrária à 2. Como a fórmula a obter é universalmente quantificada deve assumir-se um objecto arbitrário, c , e obter a fórmula nesse objecto.

- Linhas 8 : Estabelece-se como meta a fórmula contrária a 2
- Linhas 3 : Assume-se o objecto c
- Linha 7: Obtém-se a fórmula em c

1	$\neg \exists x P(x)$	
2	$\neg \forall x \neg P(x)$	
3	$c:$	
7	$\neg P(c)$	
8	$\forall x \neg P(x)$	Intr \forall : 3 , 7
9	\perp	Intr \perp : 2 , 8
10	$\neg \neg \forall x \neg P(x)$	Intr \neg : 2 - 9
11	$\forall x \neg P(x)$	Elim \neg : 10

Estratégias de Demonstração

Exemplo 5: $\{\neg \exists x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \forall x \neg P(x)$

- A fórmula que se deve obter é uma negação, podendo ser obtida por absurdo.

- Linha 4: Assume-se a negação de 7
- Linha 6: Estabelece-se como meta a contradição

1	$\neg \exists x P(x)$	
2	$\neg \forall x \neg P(x)$	
3	c:	
4	$P(c)$	
6	\perp	
7	$\neg P(c)$	Intr \neg : 4 - 6
8	$\forall x \neg P(x)$	Intr \forall : 3 , 7
9	\perp	Intr \perp : 2 , 8
10	$\neg \neg \forall x \neg P(x)$	Intr \neg : 2 - 9
11	$\forall x \neg P(x)$	Elim \neg : 10

Estratégias de Demonstração

Exemplo 5: $\{\neg \exists x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \forall x \neg P(x)$

- A contradição estabelece-se generalizando-se existencialmente a fórmula 4 e notando que ela é contrária à premissa.
 - Linha 5: Generaliza-se existencialmente 4

1	$\neg \exists x P(x)$	
2	$\neg \forall x \neg P(x)$	
3	c:	
4	P(c)	
5	$\exists x P(x)$	Intr \exists : 4
6	\perp	Intr \perp : 1 , 5
7	$\neg P(c)$	Intr \neg : 4 - 6
8	$\forall x \neg P(x)$	Intr \forall : 3 , 7
9	\perp	Intr \perp : 2 , 8
10	$\neg \neg \forall x \neg P(x)$	Intr \neg : 2 - 9
11	$\forall x \neg P(x)$	Elim \neg : 10

Estratégias de Demonstração

- A outra lei de de Morgan obtem-se similarmente

Exemplo 6: $\{\neg \forall x P(x)\} \vdash_{DN} \exists x \neg P(x)$

- Pretendendo-se uma fórmula quantificada existencialmente, e não havendo qualquer objecto a quem se possam atribuir propriedades pela premissa, a demonstração por deve ser feita por absurdo.

- Linha 2: Assume-se a negação da conclusão
- Linha 10: Obtém-se o absurdo a fórmula nesse nome em 10
- Linhas 11 e 12 : Nega-se a hipótese e elimina-se a dupla negação

1	$\neg \forall x P(x)$	
2	$\neg \exists x \neg P(x)$	
	...	
10	\perp	
11	$\neg \neg \exists x \neg P(x)$	Intr \neg : 2 - 9
12	$\exists x \neg P(x)$	Elim \neg : 10

Estratégias de Demonstração

Exemplo 6: $\{\neg \forall x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \exists x \neg P(x)$

- A hipótese 2 indica que todos os objectos são P, o que contradiz a premissa. Assim a contradição obtém-se com a fórmula universalmente quantificada equivalente a 2:
 - Linha 9 : Estabelece-se como meta a fórmula contrária a 1
 - Linha 3 : Assume-se o objecto **c**
 - Linha 8: Obtém-se a fórmula em **c**

1	$\neg \forall x P(x)$	
2	$\neg \exists x \neg P(x)$	
3	$c:$	
8	$P(c)$	
9	$\forall x P(x)$	$\text{Intr } \forall : 3 - 8$
10	\perp	$\text{Intr } \perp : 1 - 9$
11	$\neg \neg \exists x \neg P(x)$	$\text{Intr } \neg : 2 - 10$
12	$\exists x \neg P(x)$	$\text{Elim } \neg : 10$

Estratégias de Demonstração

Exemplo 6: $\{\neg \forall x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \exists x \neg P(x)$

- A meta intermédia 8 pode obter-se por absurdo, já que as hipóteses anteriores apenas estabelecem negações de propriedades.
 - Linhas 4 e 6 : Assume-se a fórmula negada e obtém-se a contradição
 - Linha 7: Obtém-se a fórmula duplamente negada

1	$\neg \forall x P(x)$	
2	$\neg \exists x \neg P(x)$	
3	c:	
4	$\neg P(c)$	
6	\perp	
7	$\neg \neg P(c)$	Intr \neg : 4 - 6
8	$P(c)$	Elim \neg : 7
9	$\forall x P(x)$	Intr \forall : 3 - 8
10	\perp	Intr \perp : 1 - 9
11	$\neg \neg \exists x \neg P(x)$	Intr \neg : 2 - 10
12	$\exists x \neg P(x)$	Elim \neg : 10

Estratégias de Demonstração

Exemplo 6: $\{\neg \forall x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \exists x \neg P(x)$

- A contradição estabelece-se entre as fórmulas 2 e 4, uma vez generalizada existencialmente.

- Linha 5: Introduce-se o \exists em 4

1	$\neg \forall x P(x)$	
2	$\neg \exists x \neg P(x)$	
3	c:	
4	$\neg P(c)$	
5	$\exists x \neg P(x)$	Intr \exists : 4
6	\perp	Intr \perp : 2 , 5
7	$\neg \neg P(c)$	Intr \neg : 4 - 6
8	$P(c)$	Elim \neg : 7
9	$\forall x P(x)$	Intr \forall : 3 - 8
10	\perp	Intr \perp : 1 - 9
11	$\neg \neg \exists x \neg P(x)$	Intr \neg : 2 - 10
12	$\exists x \neg P(x)$	Elim \neg : 10