Lógica Computacional

Axiomas do Mundo dos Blocos

Algumas Inferências Analíticas

Consistência e completude do sistema DN

Axiomas do Mundo dos Blocos

- A linguagem do mundo dos blocos que temos utilizado, chamemos-lhe Tarski, foi definida com os seguintes símbolos funcionais e predicativos:

Tarski = <SF, SP>

- **SF = SF_0**

- Constantes: nomes que se podem dar a blocos
  - SF_0 = {a,b,c,d, ...}

- **SP = $SP_1 \cup SP_2 \cup SP_3$**

Predicados Unários: Propriedades de tamanho e tipo dos blocos.
  - SP_1 = { Cube, Tet, Dodec, Small, Medium, Large}

- Predicados Binários: Igualdade e Relações de tamanho, tipo, posição entre blocos
  - SP_2 = { =, Larger, Smaller, SameSize, SameShape,
    FrontOf, BackOf, SameRow, LeftOf, RightOf, SameCol, Adjoins}

- Predicados Ternários: Bloco entre 2 blocos (os 3 blocos alinhados)
  - SP_3 = { Between},

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Se a semântica associada aos predicados for axiomatizada, as inferências correspondentes a consequências analíticas passam a ser consequências lógicas das premissas e dos axiomas de Tarski.

Axiomas de Forma

- Exclusividade: Não pode haver um bloco com duas formas diferentes

```
¬∃x(Cube(x)  ∧ Tet(x))
¬∃x(Tet(x)   ∧ Dodec(x))
¬∃x(Dodec(x) ∧ Cube(x))
```

- Exaustividade : Apenas existem os três tipos de blocos

```
∀x(Tet(x) ∨ Dodec(x) ∨ Cube(x))
```

- Na linguagem Traski, existe um outro predicado, **SameShape/2**, que tem de ser relacionado com este predicados unários.

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Introdução de **SameShape/2**

$$\forall x \forall y ((Tet(x) \land Tet(y)) \rightarrow SameShape(x,y))$$
$$\forall x \forall y ((Cube(x) \land Cube(y)) \rightarrow SameShape(x,y))$$
$$\forall x \forall y ((Dodec(x) \land Dodec(y)) \rightarrow SameShape(x,y))$$

- Eliminação de **SameShape/2**

$$\forall x \forall y \ ((SameShape(x,y) \land Tet(x)) \rightarrow Tet(y))$$
$$\forall x \forall y \ ((SameShape(x,y) \land Cube(x)) \rightarrow Cube(y))$$
$$\forall x \forall y \ ((SameShape(x,y) \land Dodec(x)) \rightarrow Dodec(y))$$

- O predicado **SameShape/2** corresponde a uma relação de equivalência, gozando das propriedades ***reflexivas, simétrica e transitiva***

$$\forall x \quad SameShape(x,x)$$
$$\forall x \forall y \ (SameShape(x,y) \rightarrow SameShape(y,x))$$
$$\forall x \ \forall y \ \forall z ((SameShape(x,y) \land SameShape(y,z)) \rightarrow SameShape(x,z))$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Axiomas semelhantes podem ser definidos para os tamanhos dos cubos.

Axiomas de Tamanho

- Exclusividade: Não pode haver um bloco com duas tamanhos diferentes

$$\neg\exists x\ (\mathrm{Small}(x) \wedge \mathrm{Medium}(x))$$
$$\neg\exists x\ (\mathrm{Small}(x) \wedge \mathrm{Large}(x))$$
$$\neg\exists x\ (\mathrm{Medium}(x) \wedge \mathrm{Large}(x))$$

- Exaustividade : Apenas existem os três tipos de tamanhos

$$\forall x\ (\mathrm{Small}(x) \vee \mathrm{Medium}(x) \vee \mathrm{Large}(x))$$

- Na linguagem Tarski, existe um outro predicado, **SameSize/2**, que tem de ser relacionado com este predicados unários.

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Introdução de **SameSize/2**

$$\forall x \forall y((\mathrm{Small}(x) \land \mathrm{Small}(y)) \rightarrow \mathrm{SameSize}(x,y))$$
$$\forall x \forall y((\mathrm{Medium}(x) \land \mathrm{Medium}(y)) \rightarrow \mathrm{SameSize}(x,y))$$
$$\forall x \forall y((\mathrm{Large}(x) \land \mathrm{Large}(y)) \rightarrow \mathrm{SameSize}(x,y))$$

- Eliminação de **SameSize/2**

$$\forall x \forall y\ ((\mathrm{SameSize}(x,y) \land \mathrm{Small}(x)) \rightarrow \mathrm{Small}(y))$$
$$\forall x \forall y\ ((\mathrm{SameSize}(x,y) \land \mathrm{Medium}(x)) \rightarrow \mathrm{Medium}(y))$$
$$\forall x \forall y\ ((\mathrm{SameSize}(x,y) \land \mathrm{Large}(x)) \rightarrow \mathrm{Large}(y))$$

- Tal como o predicado SameShape/2, também o predicado **SameShape/2** corresponde a uma relação de equivalência, gozando das propriedades ***reflexivas, simétrica e transitiva***

$$\forall x \quad \mathrm{SameSize}(x,x)$$
$$\forall x \forall y\ (\mathrm{SameSize}(x,y) \rightarrow \mathrm{SameSize}(y,x))$$
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\ ((\mathrm{SameSize}(x,y) \land \mathrm{SameSize}(y,z)) \rightarrow \mathrm{SameSize}(x,z))$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- No caso dos tamanhos há que considerar igualmente a ordenação dos tamanhos expressa na relação Larger/2 (e Smaller/2).

- Introdução de **Larger/2**

```
∀x∀y((Medium(x) ∧ Small (y)) → Larger(x,y))
∀x∀y((Large(x)  ∧ Small(y))  → Larger(x,y))
∀x∀y((Large(x)  ∧ Medium(y)) → Larger(x,y))
```

- Eliminação de **Larger/2**

```
∀x∀y ((Larger(x,y) → ( (Large(x)  ∧ Medium(y))
                      ∨ (Large(x)  ∧ Small(y))
                      ∨ (Medium(x) ∧ Small(y))))
```

- Equivalência de Larger/2 e Smaller/2

```
∀x∀y ( (Larger(x,y) ↔ Smaller(y,x) )
```

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Para os predicados de posição há que considerar as relações de equivalência estabelecidas pelos predicados **SameRow/2** e **SameCol/2**, com as suas propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

$$\forall x \quad SameRow(x,x)$$
$$\forall x \forall y \; (SameRow(x,y) \rightarrow SameRow(y,x))$$
$$\forall x \forall y \; ((SameRow(x,y) \land SameRow(y,z)) \rightarrow SameRow(x,z))$$

$$\forall x \quad SameCol(x,x)$$
$$\forall x \forall y \; (SameCol(x,y) \rightarrow SameCol(y,x))$$
$$\forall x \forall y \; ((SameCol(x,y) \land SameCol(y,z)) \rightarrow SameCol(x,z))$$

- Adicionalmente há que estabelecer que dois objectos diferentes não podem ocupar a mesma posição

$$\forall x \forall y \; ((SameCol(x,y) \land SameRow(x,y)\;) \leftrightarrow x = y)\;)$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Os predicados **FrontOf/2**, **BackOf/2** e **SameRow/2** gozam das seguintes propriedades:
- Exclusividade

$$\neg\exists x\exists y\ (BackOf(x,y) \wedge SameRow(x,y))$$
$$\neg\exists x\exists y\ (BackOf(x,y) \wedge FrontOf(x,y))$$
$$\neg\exists x\exists y\ (SameRow(x,y) \wedge FrontOf(x,y))$$

- Exaustividade:

$$\forall x\forall y\ (BackOf(x,y) \vee SameRow(x,y) \vee FrontOf(x,y))$$

- O predicados **BackOf/2** goza da propriedade ***transitiva.***

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\,(\,(BackOf(x,y) \wedge BackOf(y,z)\ ) \rightarrow BackOf(x,z)\ )$$

- O predicado **FrontOf/2** é equivalente ao predicado **BackOf/2** com os argumentos trocados.

$$\forall x\forall y\ (FrontOf(x,y) \leftrightarrow BackOf(y,x))$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Os predicados **RightOf/2**, **LeftOf/2** e **SameCol/2** têm propriedades semelhantes.
- Exclusividade

$$\neg\exists x\exists y\ (\mathrm{LeftOf}(x,y) \wedge \mathrm{SameCol}(x,y))$$
$$\neg\exists x\exists y\ (\mathrm{LeftOf}(x,y) \wedge \mathrm{RightOf}(x,y))$$
$$\neg\exists x\exists y\ (\mathrm{SameCol}\ (x,y) \wedge \mathrm{RightOf}(x,y))$$

- Exaustividade:

$$\forall x\forall y\ (\mathrm{LeftOf}(x,y) \vee \mathrm{SameCol}(x,y) \vee \mathrm{RightOf}(x,y))$$

- O predicados **LeftOf/2** goza da propriedade ***transitiva.***

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\,((\mathrm{LeftOf}(x,y) \wedge \mathrm{LeftOf}(y,z)) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x,z))$$

- O predicado **RightOf/2** é equivalente ao predicado **LeftOf/2** com os argumentos trocados.

$$\forall x\forall y\ (\mathrm{RightOf}(x,y) \leftrightarrow \mathrm{LeftOf}(y,x))$$

Axiomas do Mundo dos Blocos

- Os predicados **Adjoins/2** e **Between/3** requerem uma representação mais completa sobre o número da linha e da coluna em que se encontra cada objecto.

- Apenas se apresenta abaixo um axioma definidor do predicado **Adjoins/2**

$$
\begin{aligned}
&\forall x \forall y\ (\mathrm{Adjoins}(x,y)) \leftrightarrow \\
&\qquad ((\mathrm{row}(x) = \mathrm{row}(y) \wedge \mathrm{col}(x) = \mathrm{col}(y)+1\ ) \vee \\
&\qquad\ (\mathrm{row}(x) = \mathrm{row}(y) \wedge \mathrm{col}(x)+1 = \mathrm{col}(y)\ ) \vee \\
&\qquad\ (\mathrm{row}(x) = \mathrm{row}(y)+1 \wedge \mathrm{col}(x) = \mathrm{col}(y)\ ) \vee \\
&\qquad\ (\mathrm{row}(x)+1 = \mathrm{row}(y) \wedge \mathrm{col}(x) = \mathrm{col}(y)\ ))
\end{aligned}
$$

- Esta definição pressupõe que a linguagem Tarski seja estendida, nomeadamente com símbolos funcionais
  - SF_0 - A constante 1
  - SF_1 - Os símbolos funcionais **row/1** e **col/1**.
  - SF_2 – O símbolo funcional +/2

para além de alguma axiomatização da aritmética (propriedades da soma)

Demonstrações "Analíticas"

- A partir dos axiomas do Mundo de Blocos podem deduzir-se logicamente algumas propriedades que anteriormente apenas se poderiam obter analiticamente.

- Por exemplo:

$\{$ **Larger(a,b), Medium(b)** $\} \vdash_{DN}$ **Large(a)**

$\{$ **Tet(a) , Cube(b)** $\} \vdash_{DN}$ **a ≠ b**

$\{$ **Larger(a,b) , Larger(b,c)** $\} \vdash_{DN}$ **Large(a)**

$\{$ **Larger(a,b) , Larger(b,c)** $\} \vdash_{DN}$ **Medium(b)**

$\{$ **Adjoins(a,b) , LeftOf(a,b)** $\} \vdash_{DN}$ **SameRow(a,b)**

$\{$ **Between(a,b,c) , LeftOf(a,b)** $\} \vdash_{DN}$ **RightOf(a,c)**

No entanto estas demonstrações são bastante "entediantes" como se pode ver no primeiro caso (os outros ficam para exercício)

Demonstrações "Analíticas"

Exemplo: {Larger(a,b) , Medium(b)} $|=_{DN}$ Large(a)

(Larger(a,b) ∧ Medium(b)) → Large(a)

1.	Larger(a,b) ∧ Medium(b)	Elim ∀: Axioma & Elim → : 2, Axioma'
2.	Larger(a,b)	
3.	(Large(a)∧ Medium(b))∨(Medium(a)∧Small(b)) ∨(Large(a)∧ Small(b))	
4.	Large(a)∧ Medium(b)	
5.	Large(a)	
6.	Medium(a)∧ Small(b)	
7.	Small(b)	
8.	Medium(b)	
9.	∃x (Small(x) ∧ Medium(x))	Intr ∃ : " 7 & 8 "
10.	⊥	Intr ⊥ : 9, Axioma
11.	Large(a)	Elim ⊥ : 10
12.	Large(a)∧ Small(b)	
13.	Large(a)	
14.	Large(a)	Elim ∨ : 3, 4-5, 6-11, 12-13

Métodos de Demonstração com Quantificadores

Exemplo: Ordem de Quantificadores 1

$$\exists y\ \forall x\ \varphi(x,y) \rightarrow\ \forall x\ \exists y\ \varphi(x,y)$$

Se existe um bloco junto a todos os blocos, então todos os blocos têm um bloco junto deles!

1.	∃x ∀y Adjoins(x,y)	
2.	a: ∀y Adjoins(a,y)	
3.	b:	
4:	Adjoins(a,b)	Elim ∀: 2
5.	∃y Adjoins(y,b)	Intr ∃: 4
6.	∀x ∃y Adjoins(y,x)	Intr ∀: 3 - 5
7.	∀x ∃y Adjoins(y,x)	Elim ∃: 1, 2 - 6

- Mas será que existe um bloco “junto a todos os blocos” ?
- Será que esse bloco está junto a si próprio?

Métodos de Demonstração com Quantificadores

Exemplo: Ordem de Quantificadores 2

$$\exists y\ \forall x\ \varphi(x,y) \rightarrow\ \forall x\ \exists y\ \varphi(x,y)$$

- O problema não está na demonstração mas sim na premissa que viola os axiomas de posição. A mesma demonstração será válida com um predicado reflexivo, como por exemplo para o predicado **NearOf/2** definido como:

$$\forall x \forall y\ (\mathrm{NearOf}(x,y) \leftrightarrow (\mathrm{Adjoins}(x,y) \vee x = y))$$

1.	∃x ∀y NearOf(x,y)	
2.	a: ∀y NearOf(a,y)	
3.	b:	
4:	NearOf(a,b)	Elim ∀: 2
5.	∃y NearOf(y,b)	Intr ∃: 4
6.	∀x ∃y NearOf(y,x)	Intr ∀: 3 - 5
7.	∀x ∃y NearOf(y,x)	Elim ∃: 1, 2 - 6

Métodos de Demonstração com Quantificadores

Exemplo: Ordem de Quantificadores 3

$$\forall x\ \exists y\ \varphi(x,y) \rightarrow \exists y\ \forall x\ \varphi(x,y) \qquad ???$$

Se todos os blocos têm um bloco ao pé de si, será que existe um bloco ao pé de todos os blocos?

- Claramente a resposta é não! E no entanto uma demonstração "errada" consegue provar este resultado.

```
1. | ∀x ∃y NearOf(x,y)
   |----------------------
2. |  | a: ∀x NearOf(x,a)
   |  |-------------------
3. |  | ∃y ∀x NearOf(x,y)          Intr ∃: 3
4. | ∃y ∀x NearOf(x,y)            Elim ∃: 1, 2 - 3
```

- O erro está na hipótese utilizada, que atribui um nome a uma variável que está quantificada existencialmente, mas em que o quantificador não é o primeiro da fórmula utilizada!

Métodos de Demonstração com Quantificadores

Exemplo: Paradoxo do Barbeiro

> Numa aldeia existe um barbeiro que barbeia todas as pessoas que não se barbeiam a si próprios, e apenas essas pessoas.

- Na realidade não pode existir tal situação como se prova na demonstração seguinte:

1.	$\exists x\ (B(x) \land \forall y\ (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$	
2.	$b:\ B(b) \land \forall y\ (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(b,y))$	
3.	$\forall y\ (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(b,y))$	Elim $\land$: 2
4.	$\neg B(b,b) \leftrightarrow B(b,b)$	Elim $\forall$: 3
5.	$B(b,b)$	
6.	$\neg B(b,b)$	Elim $\leftrightarrow$: 4,5
7.	$\perp$	Intr $\perp$: 4,5
8.	$\neg B(b,b)$	Intr $\neg$: 4,5
9.	$B(b,b)$	Elim $\leftrightarrow$: 4,8
10.	$\perp$	Intr $\perp$: 8,9
11.	$\perp$	Elim $\exists$: 1, 2 − 10
12.	$\neg\exists x\ (B(x) \land \forall y\ (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$	Intr $\neg$: 1 − 11

Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

- O sistema de Dedução Natural **DN** apresentado contem regras de inferência de introdução e eliminação de operadores e quantificadores nomeadamente

$\wedge$ **Conjunção**	$\neg$ **Negação**	$\rightarrow$ **Implicação**	**= Igualdade**
$\vee$ **Disjunção**	$\perp$ **Contradição**	$\leftrightarrow$ **Equivalência**	**$\forall$ Q. Universal**
			$\exists$ Q. Existencial

- Adicionalmente verificamos que o sistema **T**, correspondendo ao sistema **DN** restrito aos 6 operadores iniciais $\{\wedge, \vee, \neg, \perp, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ é coerente e completo isto é, qualquer fórmula bem formada escrita com esses operadores pode ser demonstrada através das regras do sistema se e apenas se for uma consequência **tautológica** das premissas.

- **Coerência do sistema T**:
  - O sistema restrito de dedução natural T, é *tautologicamente* coerente.

$$\Phi \vdash_T \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \models_T \varphi$$

- **Completude do sistema T:**
  - O sistema restrito de dedução natural T, é *tautologicamente* completo.

$$\Phi \models_T \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash_T \varphi$$

Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

- As limitações de representação e de regras de demonstração do sistema T garantiam que apenas se poderiam considerar universos (domínios de discurso) finitos.

- Neste contexto, e assumindo que as fórmulas atómicas têm apenas dois valores de verdade possíveis {Verdade, Falso} existem um número finito de valorações para um conjunto de premissas envolvendo n fórmulas atómicas, mais exactamente $\mathbf{2^n}$.

- Apesar de este número crescer muito rapidamente com n, $\mathbf{2^n}$ é um número finito, e portanto é possível avaliar **em tempo finito** se uma fórmula φ é uma consequência tautológica de um conjunto de premissas Φ.

- No caso do sistema de Dedução Natural DN os pressupostos acima já não são válidos. Em particular, fórmulas quantificadas, mesmo que de tamanho finito, podem referir-se a um conjunto infinito de objectos.

- Por exemplo, as fórmulas abaixo definem o conjunto (infinito) de números inteiros
    - **`Integer(0)`**
    - **`∀x (Integer(x) → ∃y (Integer(y) ∧ suc(y,x)))`**

Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

- No caso do sistema de Dedução Natural DN os pressupostos acima já não são válidos. Em particular um problema que se coloca é o de saber se será possível verificar em tempo finito se uma fórmula é ou não uma consequência lógica de um conjunto de premissas. “Infelizmente”, tal não é em geral possível.

Teorema da Incompletude (de Gödel)

Qualquer sistema com um poder de expressão pelo menos igual ao necessário para axiomatizar a aritmética **não é decidível**, isto é, existem fórmulas Φ e φ para as quais não é possível determinar, em tempo finito ou infinito, se $\Phi \models \varphi$.

- No entanto, em muitos casos de interesse, esta questão pode ser resolvida em tempo finito (caso contrário, a aritmética não podia ter sido desenvolvida !).

- Nestes casos coloca-se a questão de saber se será possível obter demonstrações finitas de uma fórmula φ a partir de um conjunto de premissas Φ, sendo estas fórmulas todas FBFs de uma linguagem de primeira ordem.

Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

- De facto as propriedades de Coerência e Completude podem ser obtidas para o sistema DN de Dedução Natural, contendo as regras de introdução e de eliminação dos operadores

$\wedge$ **Conjunção** $\neg$ **Negação** $\rightarrow$ **Implicação** = **Igualdade**
$\vee$ **Disjunção** $\perp$ **Contradição** $\leftrightarrow$ **Equivalência** $\forall$ **Q. Universal**
$\exists$ **Q. Existencial**

O sistema **DN** é **coerente** e **completo** isto é, qualquer fórmula bem formada escrita com esses operadores pode ser demonstrada através das regras do sistema se e apenas se for uma consequência **lógica** (FO) das premissas.

Coerência do sistema DN:

- O sistema restrito de dedução natural DN, é coerente logicamente (FO).

$$\Phi \vdash_{DN} \varphi \quad \Longrightarrow \quad \Phi \models_{FO} \varphi$$

Completude do sistema DN:

- O sistema restrito de dedução natural DN, é completo logicamente (FO).

$$\Phi \models_{FO} \varphi \quad \Longrightarrow \quad \Phi \vdash_{DN} \varphi$$