

# Lógica Computacional

---

Demonstrações de alguns Teoremas em DN

Conversão entre Implicações e Disjunções

Negações e Implicações

Negações e Equivalências

# Implicações Triviais

---

- Implicação Trivial  $\{ B \} \vdash A \rightarrow B$

|   |                   |                          |
|---|-------------------|--------------------------|
| 1 | B                 |                          |
| 2 | A                 |                          |
| 3 | B                 | Reit : 1                 |
| 4 | A $\rightarrow$ B | Intr $\rightarrow$ : 2-3 |

Implicação Trivial  $\{ \neg A \} \vdash A \rightarrow B$

|   |                   |                          |
|---|-------------------|--------------------------|
| 1 | $\neg A$          |                          |
| 2 | A                 |                          |
| 3 | $\perp$           | Intr $\perp$ : 1,2       |
| 4 | B                 | Elim $\perp$ : 3         |
| 5 | A $\rightarrow$ B | Intr $\rightarrow$ : 2-4 |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Conversão  $\{ A \rightarrow B \} \vdash \neg A \vee B$

|    |                           |                           |
|----|---------------------------|---------------------------|
| 1  | $A \rightarrow B$         |                           |
| 2  | $\neg(\neg A \vee B)$     |                           |
| 3  | $\neg A$                  |                           |
| 4  | $\neg A \vee B$           | Intr $\vee$ : 3           |
| 5  | $\perp$                   | Intr $\perp$ : 2, 4       |
| 6  | $\neg\neg A$              | Intr $\neg$ : 3 - 5       |
| 7  | $A$                       | Elim $\neg$ : 6           |
| 8  | $B$                       | Elim $\rightarrow$ : 1, 7 |
| 9  | $\neg A \vee B$           | Intr $\vee$ : 8           |
| 10 | $\perp$                   | Intr $\perp$ : 2, 9       |
| 11 | $\neg\neg(\neg A \vee B)$ | Intr $\neg$ : 2 - 10      |
| 12 | $\neg A \vee B$           | Elim $\neg$ : 11          |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Conversão  $\{\neg A \vee B\} \vdash A \rightarrow B$

|   |                   |                                |
|---|-------------------|--------------------------------|
| 1 | $\neg A \vee B$   |                                |
| 2 | $A$               |                                |
| 3 | $\neg A$          |                                |
| 4 | $\perp$           | Intr $\perp$ : 2 , 3           |
| 5 | $B$               | Elim $\perp$ : 4               |
| 6 | $B$               |                                |
| 7 | $B$               | Reit: 6                        |
| 8 | $B$               | Elim $\vee$ : 1 , 3 - 5, 6 - 7 |
| 9 | $A \rightarrow B$ | Intr $\rightarrow$ : 2 - 8     |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Meio Excluído  $\{ \} \vdash A \vee \neg A$

|    |                           |                     |  |
|----|---------------------------|---------------------|--|
| 1  |                           |                     |  |
| 2  | $\neg(A \vee \neg A)$     |                     |  |
| 3  | $A$                       |                     |  |
| 4  | $A \vee \neg A$           | Intr $\vee$ : 2     |  |
| 5  | $\perp$                   | Intr $\perp$ : 2, 4 |  |
| 6  | $\neg A$                  | Intr $\neg$ : 3 - 5 |  |
| 7  | $A \vee \neg A$           | Intr $\vee$ : 6     |  |
| 8  | $\perp$                   | Intr $\perp$ : 2, 7 |  |
| 9  | $\neg\neg(A \vee \neg A)$ | Intr $\neg$ : 2 - 8 |  |
| 10 | $A \vee \neg A$           | Elim $\neg$ : 9     |  |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

---

- Meio Excluído  $\{ \} \vdash A \vee \neg A$

|   |  |  |                   |                            |
|---|--|--|-------------------|----------------------------|
| 1 |  |  | A                 |                            |
| 2 |  |  | A                 | Reit : 1                   |
| 3 |  |  | $A \rightarrow A$ | Intr $\rightarrow$ : 1 - 2 |
| 4 |  |  | $A \vee \neg A$   | Conversão: 3               |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Resolução       $\{ A \vee B, \neg B \vee C \} \vdash A \vee C$

|    |                 |                                  |
|----|-----------------|----------------------------------|
| 1  | $A \vee B$      |                                  |
| 2  | $\neg B \vee C$ |                                  |
| 3  | $A$             |                                  |
| 4  | $A \vee C$      | Intr $\vee$ : 3                  |
| 5  | $B$             |                                  |
| 6  | $\neg B$        |                                  |
| 7  | $\perp$         | Intr $\perp$ : 5 , 6             |
| 8  | $C$             | Elim $\perp$ : 7                 |
| 9  | $C$             |                                  |
| 10 | $C$             | Reit: 9                          |
| 11 | $C$             | Elim $\vee$ : 2 , 6 - 8 , 9 - 10 |
| 12 | $A \vee C$      | Intr $\vee$ : 11                 |
| 13 | $A \vee C$      | Elim $\vee$ : 1 , 3 - 4 , 5 - 12 |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Resolução       $\{ A \vee B, \neg B \vee C \} \vdash A \vee C$

|   |                        |                            |
|---|------------------------|----------------------------|
| 1 | $A \vee B$             |                            |
| 2 | $\neg B \vee C$        |                            |
| 3 | $\neg A \rightarrow B$ | Conversão: 1               |
| 4 | $B \rightarrow C$      | Conversão: 2               |
| 5 | $\neg A$               |                            |
| 6 | $B$                    | Elim $\rightarrow$ : 3 , 5 |
| 7 | $C$                    | Elim $\rightarrow$ : 4 , 6 |
| 8 | $\neg A \rightarrow C$ | Intr $\rightarrow$ : 5 - 7 |
| 9 | $A \vee C$             | Conversão: 8               |



# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Contrapositiva  $\rightarrow \{ A \rightarrow B \} \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

|   |                             |                            |
|---|-----------------------------|----------------------------|
| 1 | $A \rightarrow B$           |                            |
| 2 | $\neg B$                    |                            |
| 3 | $A$                         |                            |
| 4 | $B$                         | Elim $\rightarrow$ : 1 , 3 |
| 5 | $\perp$                     | Intr $\perp$ : 2 , 4       |
| 6 | $\neg A$                    | Intr $\neg$ : 3 - 5        |
| 7 | $\neg B \rightarrow \neg A$ | Intr $\rightarrow$ : 2 - 6 |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Contrapositiva  $\rightarrow \{ \neg A \rightarrow \neg B \} \vdash B \rightarrow A$

|   |                             |                            |
|---|-----------------------------|----------------------------|
| 1 | $\neg A \rightarrow \neg B$ |                            |
| 2 | $B$                         |                            |
| 3 | $\neg A$                    |                            |
| 4 | $\neg B$                    | Elim $\rightarrow$ : 1 , 3 |
| 5 | $\perp$                     | Intr $\perp$ : 2 , 4       |
| 6 | $\neg\neg A$                | Intr $\neg$ : 3 - 5        |
| 7 | $A$                         | Elim $\neg$ : 6            |
| 8 | $B \rightarrow A$           | Intr $\rightarrow$ : 2 - 7 |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Negação  $\rightarrow$

$$\{\neg(A \rightarrow B)\} \vdash A \wedge \neg B$$

|    |                         |                             |
|----|-------------------------|-----------------------------|
| 1  | $\neg(A \rightarrow B)$ |                             |
| 2  | B                       |                             |
| 3  | A                       |                             |
| 4  | B                       | Reit : 2                    |
| 5  | A $\rightarrow$ B       | Intr $\rightarrow$ : 3 - 4  |
| 6  | $\perp$                 | Intr $\perp$ : 1 , 5        |
| 7  | $\neg B$                | Intr $\neg$ : 2 - 6         |
| 8  | $\neg A$                |                             |
| 9  | A                       |                             |
| 10 | $\perp$                 | Intr $\perp$ : 8 , 9        |
| 11 | B                       | Elim $\perp$ : 10           |
| 12 | A $\rightarrow$ B       | Intr $\rightarrow$ : 9 - 11 |
| 13 | $\perp$                 | Intr $\perp$ : 1 , 12       |
| 14 | $\neg\neg A$            | Intr $\neg$ : 8 - 13        |
| 15 | A                       | Elim $\neg$ : 14            |
| 16 | A $\wedge$ $\neg B$     | Intr $\wedge$ : 7 , 15      |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

---

- Negação  $\rightarrow$

$$\{A \wedge \neg B\} \vdash \neg(A \rightarrow B)$$

|   |                         |                            |
|---|-------------------------|----------------------------|
| 1 | $A \wedge \neg B$       |                            |
| 2 | $A \rightarrow B$       |                            |
| 3 | $A$                     | Elim $\wedge$ : 1          |
| 4 | $B$                     | Elim $\rightarrow$ : 2 , 3 |
| 5 | $\neg B$                | Elim $\wedge$ : 1          |
| 6 | $\perp$                 | Intr $\perp$ : 4 , 5       |
| 7 | $\neg(A \rightarrow B)$ | Intr $\neg$ : 2 - 6        |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- **Contrapositiva**  $\leftrightarrow \{ A \leftrightarrow B \} \vdash \neg A \leftrightarrow \neg B$

|    |  |                       |  |
|----|--|-----------------------|--|
| 1  |  | $A \leftrightarrow B$ |  |
| 2  |  |                       |  |
| 3  |  |                       |  |
| 4  |  |                       |  |
| 5  |  |                       |  |
| 6  |  |                       |  |
| 7  |  |                       |  |
| 8  |  |                       |  |
| 9  |  |                       |  |
| 10 |  |                       |  |
| 11 |  |                       |  |
| 12 |  |                       |  |

  

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Contrapositiva  $\leftrightarrow \{ \neg A \leftrightarrow \neg B \} \vdash A \leftrightarrow B$

|    |                                 |   |
|----|---------------------------------|---|
| 1  | $\neg A \leftrightarrow \neg B$ |   |
| 2  | $A$                             |   |
| 3  | $\neg B$                        |   |
| 4  | $\neg A$                        | $\text{Elim } \leftrightarrow: 1, 3$          |
| 5  | $\perp$                         | $\text{Intr } \perp : 2, 4$                   |
| 6  | $\neg\neg B$                    | $\text{Intr } \neg : 3 - 5$                   |
| 7  | $B$                             | $\text{Elim } \neg : 6$                       |
| 8  | $B$                             |   |
| 9  | $\neg A$                        |   |
| 10 | $\neg B$                        | $\text{Elim } \leftrightarrow: 1, 9$          |
| 11 | $\perp$                         | $\text{Intr } \perp : 8, 10$                  |
| 12 | $\neg\neg A$                    | $\text{Intr } \neg : 9 - 11$                  |
| 13 | $A$                             | $\text{Elim } \neg : 12$                      |
| 14 | $A \leftrightarrow B$           | $\text{Intr } \leftrightarrow: 2 - 7, 8 - 13$ |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Negação  $\leftrightarrow$

$$\{\neg(A \leftrightarrow B)\} \vdash A \leftrightarrow \neg B$$

|     |          |                          |
|-----|----------|--------------------------|
| 1   | ¬(A ↔ B) |                          |
| 2   | A        |                          |
| 3   | B        |                          |
| 4   | A        |                          |
| 5   | B        | Reit : 3                 |
| 6   | B        |                          |
| 7   | A        | Reit : 2                 |
| 8   | A ↔ B    | Intr ↔: 4 - 5 , 6 - 7    |
| 9   | ⊥        | Intr ⊥ : 1 , 8           |
| 10  | ¬B       | Intr ¬ : 3 - 9           |
| 11  | ¬B       |                          |
| ... |          |                          |
| 19  | A        |                          |
| 20  | A ↔ ¬B   | Intr ↔: 2 - 10 , 11 - 19 |

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Negação  $\leftrightarrow$

$\{A \leftrightarrow \neg B\} \vdash \neg(A \leftrightarrow B)$

|     |                             |                                 |
|-----|-----------------------------|---------------------------------|
| 1.  | $A \leftrightarrow \neg B$  |                                 |
| 2.  | $A \leftrightarrow B$       |                                 |
| 3.  | $A$                         |                                 |
| 4.  | $B$                         | Elim $\leftrightarrow$ : 2 , 3  |
| 5.  | $\neg B$                    | Elim $\leftrightarrow$ : 1 , 3  |
| 6.  | $\perp$                     | Intr $\perp$ : 4 , 5            |
| 7.  | $\neg A$                    | Intr $\neg$ : 3 - 6             |
| 8.  | $B$                         |                                 |
| 9.  | $A$                         | Elim $\leftrightarrow$ : 2 , 8  |
| 10. | $\perp$                     | Intr $\perp$ : 7 , 9            |
| 11. | $\neg B$                    | Intr $\neg$ : 8 - 10            |
| 12. | $A$                         | Elim $\leftrightarrow$ : 1 , 11 |
| 13. | $\perp$                     | Intr $\perp$ : 7 , 12           |
| 14. | $\neg(A \leftrightarrow B)$ | Intr $\neg$ : 2 - 13            |



# Teoremas relacionando Equivalências e Negações

## - Encadeamento de Equivalências

$$\{ A \leftrightarrow ( B \leftrightarrow C ) \} \vdash \neg A \leftrightarrow ( B \leftrightarrow \neg C )$$

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | $A \leftrightarrow ( B \leftrightarrow C )$           |   |
| 2 | $\neg A \leftrightarrow \neg( B \leftrightarrow C )$  | <b>Contrapositiva <math>\leftrightarrow</math> : 1</b>  |
| 3 | $\neg A$  |   |
| 4 | $\neg( B \leftrightarrow C )$                         | <b>Elim <math>\leftrightarrow</math>: 2 , 3</b>         |
| 5 | $B \leftrightarrow \neg C$                            | <b>Negação <math>\leftrightarrow</math> : 4</b>         |
| 6 | $B \leftrightarrow \neg C$                            |   |
| 7 | $\neg( B \leftrightarrow C )$                         | <b>Negação <math>\leftrightarrow</math> : 6</b>         |
| 8 | $\neg A$  | <b>Elim <math>\leftrightarrow</math>: 2 , 7</b>         |
| 9 | $\neg A \leftrightarrow ( B \leftrightarrow \neg C )$ | <b>Intr <math>\leftrightarrow</math>: 3 - 5 , 6 - 8</b> |

# Teoremas relacionando Equivalências e Negações

## - Encadeamento de Equivalências

$$\{\neg A \leftrightarrow (B \leftrightarrow \neg C)\} \vdash A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | $\neg A \leftrightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$ |   |
| 2 | $A \leftrightarrow \neg(B \leftrightarrow \neg C)$  | <b>Contrapositiva <math>\leftrightarrow</math> : 1</b>  |
| 3 | $A$   |   |
| 4 | $\neg(B \leftrightarrow \neg C)$                    | <b>Elim <math>\leftrightarrow</math>: 2 , 3</b>         |
| 5 | $B \leftrightarrow C$                               | <b>Negação <math>\leftrightarrow</math> : 4</b>         |
| 6 | $B \leftrightarrow C$                               |   |
| 7 | $\neg(B \leftrightarrow \neg C)$                    | <b>Negação <math>\leftrightarrow</math> : 6</b>         |
| 8 | $A$   | <b>Elim <math>\leftrightarrow</math>: 2 , 7</b>         |
| 9 | $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$           | <b>Intr <math>\leftrightarrow</math>: 3 - 5 , 6 - 8</b> |