Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2020/ 21 – 4.º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**n.º:**

1. **(2.5 vals)** Considere o conjunto S de cláusulas Horn abaixo.

1. $(A \wedge B) \rightarrow C$	6. $(B \wedge C) \rightarrow D$
2. $\top \rightarrow A$	7. $(A \wedge D) \rightarrow \bot$
3. $(B \wedge E) \rightarrow F$	8. $(E \wedge F) \rightarrow G$
4. $(D \wedge H) \rightarrow G$	9. $\top \rightarrow B$
5. $\top \rightarrow E$	10. $(F \wedge G) \rightarrow \bot$

a) Mostre que este conjunto de cláusulas é insatisfazível.

Para satisfazer o conjunto, os átomos **A, B** e **E** têm de ser verdadeiros **(T).** Mas então, por **1, C** tem de ser **T**; por **6**, **D** tem de ser **T**, e sendo **A** e **D** verdadeiros a cláusula **7** não pode ser satisfeita.

b) Mostre que retirando uma única cláusula, o conjunto restante passa a ser satisfazível. Qual das cláusulas retiraria e indique uma interpretação que tornaria o restante conjunto satisfazível.

Cláusula retirada: 9

Interpretação que satisfaz as cláusulas restantes:

A = T (2)	B = F	C = V/F	D = F
E = T (5)	F = F	G = V/F	H = V/F

2. **(3.5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$A \leftrightarrow \neg (B \vee C)$
P2	$C \rightarrow \neg D$
Z	$D \rightarrow \neg (A \leftrightarrow B)$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão (Z) na forma clausal.

1. $\neg A \vee \neg B$	de P1
2. $\neg A \vee \neg C$	de P1
3. $A \vee B \vee C$	de P1
4. $\neg C \vee \neg D$	de P2
5. $\neg A \vee B$	de ¬Z
6. $A \vee \neg B$	de ¬Z
7. D	de ¬Z

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

8. $\neg C$	Res 7, 4
9. $A \vee B$	Res 8, 3
10. A	Res 9, 6
11. B	Res 10, 5
12. $\neg A$	Res 11, 1
13. $\square$	Res 12, 10

3. (2 vals) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Nenhum cubo pode estar atrás de qualquer dodecaedro.

$\neg \exists x\ \exists y\ (Cube(x) \land Dodec(y) \land BackOf(x,y))$

b) Existe um tetraedro que está à direita de todos os cubos que não sejam grandes.

$\exists x\ (Tet(x) \land \forall y\ ((Cube(y) \land \neg Large(y)) \rightarrow RightOf(x,y)))$

c) Todos os dodecaedros são grandes exceto se estiverem ao lado de um cubo.

$\forall x\ (\ [Dodec(x) \land \neg \exists y\ (Cube(y) \land Adjoins(y,x))] \rightarrow Large(x))$

d) Só há um objeto ao lado de qualquer cubo que esteja ao seu lado (Sugestão: Utilize o predicado =).

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (Cube(x) \land Adjoins(x,y) \land Adjoins(x,y) \rightarrow y = z)$

e) Se dois blocos estiverem na mesma linha pelo menos um deles é um cubo .

$\forall x\ \forall y\ (SameRow(x,y) \rightarrow (Cube(x) \lor Cube(y)))$

4. (1.5 vals) Converta as fórmulas para a forma Prenex com a matriz na forma normal conjuntiva (CNF).

a) $\forall x\ (\ \exists y\ (Cube(y) \land Adjoins(x,y)) \rightarrow Dodec(x))$

$\forall x\ \forall y\ (\ \neg Cube\ (x) \lor \neg Adjoins(x,y) \lor Dodec(x))$

b) $\neg\ \forall x\ (Cube(x) \rightarrow \exists y\ (Dodec(y) \land Adjoins(x,y)))$

$\exists x\ \forall y\ (\ Cube(x) \land (\neg Dodec(y) \lor \neg Adjoins(x,y)))$

c) $\forall x\ (\ \neg \exists y\ FrontOf(x,y) \rightarrow \exists z\ (Cube(z) \land Smaller(z,\ x)))$

$\forall x\ \exists y\ \exists z\ ((FrontOf(x,y) \lor Cube(z)) \land (FrontOf(x,y) \lor Smaller(z,\ x)))$

5. (2 vals) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, as seguintes fórmulas Prenex:

a) $\forall x\ \exists y\ \exists z\ ((Cube(x) \rightarrow (Tet(y) \lor FrontOf(x,y))) \land (Dodec(z) \lor Large(z)))$

1. $\neg Cube(x1) \lor Tet(f(x1)) \lor FrontOf(x,\ f(x1))$
2. $Dodec(a) \lor Large(a)$

b) $\exists x\ \forall y\ \exists z\ (Tet(x) \land (Cube(y) \rightarrow (Dodec(z) \land Between(z,x,y))))$

1. $Tet(a)$
2. $\neg Cube(y1) \lor Dodec(f(y1))$
3. $\neg Cube(y2) \lor Between(f(y2),\ a,\ y2)$

6. (1 val) Obtenha a substituição mais geral σ que unifique os dois termos abaixo. Indique qual o termo obtido quando se aplica essa substituição a qualquer um dos termos unificados.

T1: $OneOf(x,\ g(z),y)$ T2: $OneOf(f(u),\ u,\ f(u,v))$

substituição $\sigma = \{x/f(g(z)),\ u/g(z),\ y/\ f(g(z),\ v)\}$

$T1\ \sigma = T2\ \sigma = OneOf(f(g(z)),\ g(z),\ f(g(z),\ v))$

7. **(5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

```
1. | ∀x (Dodec(x) → ∃y ∃z (Cube(y) ∨ Between(x,y,z)))
2. | ∀x ((∃y ∃z Between(x,y,z)) → Large(x))
3. | ∀x (Medium (x) → Dodec(x))
   |---------------------------------------------
C  | ¬∃x Large(x) → [∃y Medium(y) → ∃z Cube(z)]
```

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

```
1.¬Dodec(x1) ∨ Cube(f(x1)) ∨ Between(x1,f(x1),g(x1))   de P1
2.¬ Between(x2,y2,z2) ∨ Large(x2)                      de P2
3.¬ Medium(x3) ∨ Dodec(x3)                             de P3
4 ¬Large(x4)                                           de ¬C
5.Medium(a)                                            de ¬C
6.¬Cube(x6)                                            de ¬C
```

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

```
 7. Dodec(a)                           Res  5,3{x3/a}
 8. Cube(f(a)) ∨ Between(a, f(a),g(a)) Res  7,1{x1/a}
 9. Between(a, f(a),g(a))              Res  8,6{x6/f(a)}
10. Large(a)                           Res  9,2{x2/a, y2/f(a), z2/g(a)}
11. □                                  Res 10,4{x4 / a}
```

8. **(2.5 vals)** Prove por indução sobre os números naturais, que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = (1^2+2^2+...+n^2) > n^3/3$, para qualquer **n** natural. **Sugestão**: Relembre o binómio de Newton, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Passo Base:

Para n = 1 confirmamos que $1^2 = 1 > 1/3 = 1^3/3$.

Passo de Indução: $\sum_{i=1}^{n} i^2 > n^3 / 3 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} i^2 > (n+1)^3 / 3$

$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$	Por definição
$> n^3/3 + (n+1)^2$	Hipótese de indução
$> (n^3 + 3(n+1)^2) /3$	Soma de frações
$> (n^3 + 3n^2 + 6n + 3) / 3$	Desenvolvimento de $(n+1)^2$
$> ((n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (3n + 2)) / 3$	Separação de parcelas
$> (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) / 3$	$3n + 2 > 0$
$> (n + 1)^3/ 3$	Binómio de Newton

q.e.d.