Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2020/21 – 3.º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**n.º:**

1. **(3 val)** Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Existe um bloco maior que alguns tetraedros, mas não de todos.

$$\exists x\ (\exists y\ (Tet(y)\ \land\ Larger(x,y))\ \land\ \neg\ \forall z\ (Tet(z)\ \to\ Larger(x,z))$$

b) Os únicos tetraedros grandes são os que têm dodecaedros à sua frente.

$$\forall x\ (Tet(x)\ \to\ (Large(x)\ \to\ \exists y\ (Dodec(y)\ \land\ FrontOf(y,x))))$$

c) Existem pelo menos dois blocos atrás de um dos cubos.

$$\exists x\ \exists y\ \exists z\ (Cube(x)\ \land\ BackOf(y,x)\ \land\ BackOf(z,x)\ \land\ y \neq z)$$

d) Todos os dodecaedros têm o tamanho de um dos blocos que está à sua esquerda (deles).

$$\forall x\ (Dodec(x)\ \to\ \exists y\ (LeftOf(y,x)\ \land\ SameSize(x,y)))$$

e) Blocos de formas diferentes têm tamanhos diferentes a menos que estejam nas mesmas linhas.

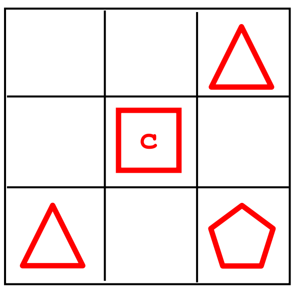
$$\forall x\ \forall y\ ((\neg SameShape(x,y)\ \land\ \neg SameRow(x,y))\ \to\ \neg SameSize(x,y))$$

f) Blocos que estejam ao lado um do outro, só são cubos se forem pequenos.

$$\forall x\ ((Cube(x)\ \land\ \exists y\ Adjoins(x,y))\ ->\ Small(x))$$

2. **(3 val)** Considerando a linguagem dos Mundos de Tarski (num tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1. $\exists x\ (Dodec(x)\ \land\ \forall y\ (Tet(y)\ \to\ (SameRow(x,y) \lor SameCol(x,y))))$
2. $\exists x\ (Cube(x)\ \land\ \exists y\ \exists z\ (Between(x,y,z))$
3. $\exists x\ (Dodec(x)\ \land\ \neg\ \exists y\ FrontOf(y,x))$
4. $\forall x\ (\neg\ Tet(x) \land \neg\ Dodec(x))\ \to\ x = c)$
5. $\exists x\ (Tet\ (x)\ \land\ \forall y\ (x \neq y\ \to RightOf(y,x)))$
6. $\forall x\ \forall y\ (\exists z\ Between(z,x,y) \to\ Tet(x))$



3. **(4 val)** Preencha as caixas assinaladas para completar a demonstração no sistema de Dedução Natural

```
1  | ∀x (Cube(x) → ∃y ∃z Between(x,y,z))
2  | ∃x ∃y ∃z Between(x,y,z) → ∀w Large(w)
   |------------------------------------------
3  | | ∃x ¬Large(x)
   | |-------------------------------------
4  | | | c:
   | | |-----------------------------------
5  | | | | Cube(c)
   | | | |---------------------------------
6  | | | | Cube(c) → ∃y ∃z Between(c,y,z))        Elim ∀  : 1
7  | | | | ∃y ∃z Between(c,y,z)                   Elim →  : 5, 6
8  | | | | | a, b: Between(c,a,b)
   | | | | |-----------------------------
9  | | | | | ∃x ∃y ∃z Between(x,y,z)            Intr ∃  : 8
10 | | | | ∃x ∃y ∃z Between(x,y,z)               Elim ∃  : 7, 8 - 9 (2x)
11 | | | | ∀w Large(w)                           Elim →  : 2, 10
12 | | | | | d: ¬ Large(d)
   | | | | |-----------------------------
13 | | | | | Large(d)                           Elim ∀  : 11
14 | | | | | ⊥                                  Intr ⊥  : 12 , 13
15 | | | | ⊥                                     Elim ∃  : 3, 12 - 14
16 | | | ¬ Cube(c)                               Intr ¬  : 5 - 15
17 | | ∀x ¬ Cube(x)                              Intr ∀  : 4 - 16
18 | ∃x ¬ Large(x) → ∀x ¬ Cube(x)                Intr →  : 3 - 17
```

4. **(3 val)** Considere o seguinte argumento usando a linguagem de Tarski, e a respetiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

```
1. | ∃x (Cube(x) ∧ ¬ Small(x))
2. | ¬ ∀y (¬ Cube(y) ∨ ¬ Small(y))
   |----------------------------------
3. | | a:
   | |--------------------------------
4. | | Cube(a) ∧ ¬ Small(a)             Elim ∃ : 1
5. | | ¬ Small(a)                       Elim ∧ : 4
6. | | ¬ Cube(a) ∨ ¬ Small(a)           Intr ∨ : 5
7. | ∀x (¬ Cube(x) ∨ ¬ Small(x))        Intr ∀ : 3 - 6
8. | ⊥                                  Intr ⊥ : 2, 7
9. | ∃x ∃y BackOf(x,y)                  Intr ⊥ : 8
```

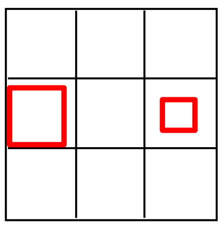
a) Indique todos os erros da demonstração acima, justificando.

Erros:

Erro 1. Na linha 8, as linhas 2 e 7 referem variáveis diferentes (**x** e **y**). Mas este erro pode ser reparado usando a variável **y** na linha 7, pois a escolha do nome da variável é arbitrária. Igualmente errada é a justificação da linha 9 (Elim e não Intr da ⊥, mas não tem efeito na demonstração da conclusão.

Erro 2. O erro principal ocorre na linha 4, já que a eliminação do quantificador existencial (∃) não pode ser feita dessa forma! Só se poderia ter substituído a variável **x** pela constante **a**, se o quantificador na linha 1 fosse universal (∀).

b) Apresente no quadro em baixo um contraexemplo que mostre que o argumento não é válido.



5. (2 val) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

```
1 | ∀x (Dodec(x) → Small(x))
2 | ∃x (¬ Cube(x) ∧ Large(x))
  |----------------------------
3 | ∃x (Tet(x) ∧ ¬ Medium(x))
```

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário utilizar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

Nota: 2 respostas erradas cancelam uma resposta certa, mas a classificação da questão nunca será negativa.

- [ ] ∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))
- [x] ¬ ∃x (Large(x) ∧ Medium(x))
- [x] ¬ ∃x (Large(x) ∧ Small(x))
- [ ] ¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))
- [x] ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
- [ ] ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))
- [ ] ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))
- [ ] ¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))

6. (5 val) Valide o seguinte argumento apresentando a respetiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

```
1  | ∃x ¬ ∀y SameRow(x,y)
2  | ∀x ∀y ( SameSize(x,y)→ SameRow(x,y))
   |----------------------------------------
3  | | ∀x ∀y SameSize(x,y)
   | |----------------------------------
4  | | | a: ¬ ∀y SameRow(a,y)
   | | |--------------------------------
5  | | | | b:
   | | | |------------------------------
6  | | | | SameSize(a,b)→ SameRow(a,b)     Elim ∀ : 2 (2x)
7  | | | | SameSize(a,b)                   Elim ∀ : 3 (2x)
8  | | | | SameRow(a,b)                    Elim → : 6 , 7
9  | | | ∀y SameRow(a,y)                   Intr ∀ : 5 - 8
10 | | | ⊥                                 Intr ⊥ : 4 , 9
11 | | ⊥                                   Elim ∃ : 1 , 4 - 10
12 | ¬ ∀x ∀y SameSize(x,y)                 Intr ¬ : 3 - 11
```