Estratégias de Demonstração no Sistema DN

Regras Heurísticas

Exemplos

Estratégias de Demonstração

- Sendo demonstrável que o sistema DN é coerente e completo, existe a garantia de que qualquer consequência-lógica (FO) é demonstrável no sistema DN.

- No entanto, esta garantia não fornece pistas sobre como podem ser obtidas essas demonstrações.

- Embora não existam procedimentos determinísticos, existem heurísticas que geralmente guiam de uma forma conveniente as demonstrações e indicam quais as regras do sistema a utilizar em cada instante.

- Para além das regras indicadas para o sistema DNp (sem quantificadores) podem incluir-se
  - Se a fórmula a demonstrar é universalmente quantificada utilizar a regras de introdução do $\forall$
  - Se já existe uma fórmula existencialmente quantificada utilizar a regras de eliminação do $\exists$.
  - Nos casos em que não existem outras pistas, tentar o raciocínio por absurdo

- Alguns exemplos irão ilustrar a estratégia a utilizar

Estratégias de Demonstração

Exemplo:

$\{\forall x\ (\mathrm{Dodec}(x) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x, a)),\ \forall x\ (\mathrm{Tet}(x) \rightarrow \mathrm{RightOf}(x,a))\ \}$

$\vdash_{DN} \forall x\ (\mathrm{SameCol}(x, a) \rightarrow \mathrm{Cube}(x))$

1	$\forall x\ (\mathrm{Dodec}(x) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x, a))$
2	$\forall x\ (\mathrm{Tet}(x) \rightarrow \mathrm{RightOf}(x,a))$
	$\forall x\ (\mathrm{SameCol}(x, a) \rightarrow \mathrm{Cube}(x))$

- Para demonstrar a conclusão exclusivamente através de regras do sistema DN, teremos de incluir nas premissas conhecimento sobre o mundo dos blocos, nomeadamente:

- Estar na mesma coluna é incompatível com estar à direita
- Estar na mesma coluna é incompatível com estar à esquerda
- Só existem três formas: tetraedro, cubo e dodecaedro

Estratégias de Demonstração

- Este conhecimento está expresso nos axiomas de Tarski que são adicionados como premissas na demonstração.

a1	∀x(Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
a2	∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ LeftOf(x,y))
a3	∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ RightOf(x,y))
1	∀x (Dodec(x) → LeftOf(x, a))
2	∀x (Tet(x) → RightOf(x,a))
30	∀x (SameCol(x, a) → Cube(x))

- A partir deste momento, a demonstração faz-se exclusivamente através de regras do sistema DN.

- Para esse efeito é conveniente utilizar algumas regras heurísticas para obter a demonstração pretendida, como se fará de seguida.

Estratégias de Demonstração

- Sendo a frase a demonstrar universalmente quantificada, deverá utilizar-se a regra da introdução do ∀. Assim
  - Linha 3: assume-se a existência de um objecto, **c**, arbitrário
  - Linha 29: obtém-se a fórmula pretendida nesse objecto
  - Linha 30: justifica-se a fórmula obtida

```
a1 | ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
a2 | ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ LeftOf(x,y))
a3 | ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ RightOf(x,y))
1  | ∀x (Dodec(x) → LeftOf(x, a))
2  | ∀x (Tet(x) → RightOf(x,a))
   |----------------------------------------
3  |  | c:
   |  |-----------
   |  | ...
29 |  | SameCol(c, a) → Cube(c)
30 | ∀x (SameCol(x, a) → Cube(x))   Intr ∀: 3 - 29
```

Estratégias de Demonstração

- Sendo a frase a demonstrar na linha 29 uma implicação, deverá utilizar-se a regra da introdução do operador →. Assim
  - Linha 4: assume-se a existência do implicante
  - Linha 28: obtém-se a fórmula do implicado
  - Linha 29: justifica-se a fórmula obtida

```
a1 | ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
a2 | ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ LeftOf(x,y))
a3 | ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ RightOf(x,y))
1  | ∀x (Dodec(x) → LeftOf(x, a))
2  | ∀x (Tet(x) → RightOf(x,a))
   |----------------------------------------
3  | | c:
   | |--------
4  | |   | SameCol(c,a)
   | |   |------------
   | |   |   ...
28 | |   | Cube(c)
29 | |  SameCol(c, a) → Cube(c)        Intr → : 4 - 28
30 | ∀x (SameCol(x, a) → Cube(x))      Intr ∀: 3 - 29
```

Estratégias de Demonstração

- A estratégia a seguir para demonstrar que **c** é um cubo (linha 28), passa por :
  - Linha 11: demonstrar que não é um dodecaedro
  - Linha 18: demonstrar que não é um tetraedro

```
a1 | ∀x ((Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
a2 | ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ LeftOf(x,y))
a3 | ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ RightOf(x,y))
1  | ∀x (Dodec(x) → LeftOf(x, a))
2  | ∀x (Tet(x) → RightOf(x,a))
   |------------------------------------------
3  |  | c:
   |  |-----------
4  |  |  | SameCol(c,a)
   |  |  |-----------
   |  |  | ...
11 |  |  | ¬ Dodec(c)
   |  |  | ...
18 |  |  | ¬ Tet(c)
   |  |  | ...
28 |  |  | Cube(c)
29 |  |  SameCol(c, a) → Cube(c)          Intr → : 4 - 28
30 | ∀x (SameCol(x, a) → Cube(x))         Intr ∀: 3 - 29
```

Estratégias de Demonstração

- A demonstração de que c não é um dodecaedro pode fazer-se por *Modus Tollens* (na implicação da linha 1) e por absurdo (com a instanciação do axioma **a2** na linha 5)

```
a2 | ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ LeftOf(x,y))
1  | ∀x (Dodec(x) → LeftOf(x, a))
   |----------------------------------
   |     ...
4  |   | SameCol(c,a)
   |   |-------------
5  |   | ¬ (SameCol(c,a) ∧ LeftOf(c,a))     Elim ∀ :a2  (2X)
6  |   |  | Dodec(c)
   |   |  |---------
7  |   |  | Dodec(c) → LeftOf(c, a)         Elim ∀ : 1
8  |   |  | LefttOf(c,a)                    Elim → : 6 , 7
9  |   |  | SameCol(c,a) ∧ LeftOf(c,a)      Intr ∧ : 4 , 8
10 |   |  | ⊥                               Intr ⊥ : 5 - 9
11 |   | ¬ Dodec(c)                         Intr ¬ : 6 - 10
   |   |  ...
30 | ∀x (SameCol(x, a) → Cube(x))
```

Estratégias de Demonstração

- A demonstração de que c não é um tetraedro é semelhante e passa utiliza o *Modus Tollens* (na implicação da linha 2) e o absurdo (com a instanciação do axioma **a3** na linha 12)

```
a3 | ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ RightOf(x,y))
2  | ∀x (Tet(x) → RightOf(x,a))
   |-----------------------------------------------
1  |        ...
4  |     SameCol(c,a)
5  |     ¬ (SameCol(c,a) ∧ RightOf(c,a))      Elim ∀ :a3  (2X)
12 |     | Tet(c)
   |     |-----------------
13 |     | Tet(c) → RightOf(c, a)             Elim ∀ : 2
14 |     | RighttOf(c,a)                      Elim → : 12 , 13
15 |     | SameCol(c,a) ∧ RightOf(c,a)        Intr ∧ : 4 , 14
16 |     | ⊥                                  Intr ⊥ : 5 , 15
18 |     ¬ Tet(c)                             Intr ¬ : 13 - 16
   |     ...
30 | ∀x (SameCol(x, a) → Cube(x))
```

Estratégias de Demonstração

- Finalmente a demonstração de que **c** é um cubo faz-se através do raciocínio por casos, a partir da disjunção obtida na linha 19 por instanciação do axioma **a1**.

```
a1 |  ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
   |----------------------------------------
   |      ...
11 |    ¬ Dodec(c)
   |      ...
18 |    ¬ Tet(c)
19 |    Tet(c) ∨ Cube(c) ∨ Dodec(c)      Elim ∀ : a1
20 |     | Tet(c)
   |     |--------
21 |     | ⊥                    Intr ⊥ : 18 , 20
22 |     | Cube(c)              Elim ⊥ : 21
23 |     | Cube(c)
   |     |--------
24 |     | Cube(c)              Reit   : 23
25 |     | Dodec(c)
   |     |--------
26 |     | ⊥                    Intr ⊥ : 11 , 25
27 |     | Cube(c)              Elim ⊥ : 26
28 |    Cube(c)                 Elim : 19, 20-22 , 23 -24, 25-27
   |       ...
```

Estratégias de Demonstração

Exemplo 2: { ∃x ∀y G(y,x) } $|-_{DN}$ ∀y ∃x G(y,x)

- Sabendo que existe um objecto com uma dada propriedade podemos começar por nomeá-lo, e construir a prova por eliminação do ∃.
    - Linhas 2 e 6: Seja **a** o objecto indicado pela linha 1.

```
1 | ∃x ∀y G(y,x)
  |----------------------------
2 |  | a: ∀y G(y,a)
  |  |-------------------------
  |  |
  |  |
6 |  | ∀y ∃x G(y,x)
7 | ∀y ∃x G(y,x)        Elim ∃ : 1, 2 - 6
```

Estratégias de Demonstração

Exemplo 2: $\{\ \exists x\ \forall y\ G(y,x)\ \}\ \vdash_{DN}\ \forall y\ \exists x\ G(y,x)$

- Sendo a fórmula 6 a demonstrar universalmente quantificada, deverá utilizar-se a regra da introdução do ∀. Assim
  - Linha 3: assume-se a existência de um objecto, **b**, arbitrário
  - Linha 5: obtém-se a fórmula pretendida nesse objecto

```
1 | ∃x ∀y G(y,x)
  |----------------------------
2 |  | a: ∀y G(y,a))
  |  |----------------------------
3 |  |  | b:
  |  |  |----------------------------
  |  |  |
5 |  |  | ∃x G(b,x)
6 |  | ∀y ∃x G(y,x)          Intr ∀ : 3 - 5
7 | ∀y ∃x G(y,x)             Elim ∃ : 1, 2 - 6
```

Estratégias de Demonstração

Exemplo 2: $\{\ \exists x\ \forall y\ G(y,x))\ \}\ \vdash_{DN}\ \forall y\ \exists x\ G(y,x)$

- Finalmente, para obter a fórmula 5 teremos de obter a relação P entre algum bloco e o bloco **b**. Mas esse objecto pode ser o bloco **a**.
  - Linha 4: instancia-se a fórmula quantificada universalmente em 2.

1	$\exists x\ \forall y\ G(y,x)$	
2	$a:\ \forall y\ G(y,a))$	
3	$b:$	
4	$G(b,a)$	Elim $\forall$: 2
5	$\exists x\ G(b,x)$	Intr $\exists$: 4
6	$\forall y\ \exists x\ G(y,x)$	Intr $\forall$: 1, 2 - 6
7	$\forall y\ \exists x\ G(y,x)$	Elim $\exists$: 1, 2 - 6

- Uma vez feita esta demonstração podemos igualmente demonstrar a sua "contrapositiva".

Estratégias de Demonstração

Exemplo 3: $\{\neg\forall y\ \exists x\ G(y,x)\ \} \vdash_{DN} \neg\ \exists x\ \forall y\ G(y,x)$

- Pretendendo obter uma fórmula negada, deveremos usar a regra de Introdução da ¬.
  - Linha 2 e 9: assume-se a negação da fórmula e obtem-se a ⊥

1	$\neg\ \forall y\ \exists x\ G(y,x)$	
2	$\quad \exists x\ \forall y\ G(y,x)$	
	$\quad \ldots$	
9	$\quad \perp$	
10	$\neg\ \exists x\ \forall y\ G(y,x)$	Intr ¬ : 2 - 9

Exemplo 3: $\{\neg\forall y\ \exists x\ G(y,x)\ \} \mid\!-_{DN} \neg\ \exists x\ \forall y\ G(y,x)$

- Havendo um objecto com uma dada propriedade (linha 2) podemos nomeá-lo.
  - Seja **a** o objecto indicado pela linha 2.

1	$\neg\ \forall y\ \exists x\ G(y,x)$	
2	$\exists x\ \forall y\ G(y,x)$	
3	$a{:}\ \forall y\ G(y,a)$	
9	$\perp$	
10	$\neg\ \exists x\ \forall y\ G(y,x)$	Intr $\neg$: 2 - 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 3: $\{\neg\forall y\ \exists x\ G(y,x)\ \} \vdash_{DN} \neg\ \exists x\ \forall y\ G(y,x))$

- A contradição em 9 advém do bloco a estar em P com todos os blocos e a fórmula 1 que diz que não existe nenhum bloco para o qual não existem blocos em P com ele.
  - Linha 8: Obtenha-se a contradição da fórmula 1

1	$\neg\ \forall y\ \exists x\ G(y,x)$	
2	$\quad \exists x\ \forall y\ G(y,x)$	
3	$\quad\quad$ a: $\forall y\ G(y,a))$	
	$\quad\quad$	
8	$\quad \forall y\ \exists x\ G(y,x)$	
9	$\quad \perp$	Intr $\perp$: 1 - 8
10	$\neg\ \exists x\ \forall y\ G(y,x)$	Intr $\neg$: 2 - 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 3: $\{\neg\forall y\ \exists x\ G(y,x)\ \} \vdash_{DN} \neg\ \exists x\ \forall y\ G(y,x)$

- Querendo obter em 8 uma fórmula que não contem o nome **a**, essa fórmula deverá ser obtida por eliminação do ∃.
  - Obtenha-se a fórmula sem o nome **a** em 7

1	¬ ∀y ∃x G(y,x)	
2	∃x ∀y G(y,x)	
3	a: ∀y G(y,a)	
	....	
7	∀y ∃x G(y,x)	
8	∀y ∃x G(y,x)	Elim ∃ : 2 , 3 - 7
9	⊥	Intr ⊥ : 1 - 8
10	¬ ∃x ∀y G(y,x)	Intr ¬ : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 3: $\{\neg \forall y\ \exists x\ G(y,x)\ \} \vdash_{DN} \neg\ \exists x\ \forall y\ G(y,x)$

- Em 7 pretende-se uma fórmula quantificada universalmente, pelo que deverá ser usada a regra de Introdução do ∀.
  - Assume-se **b** arbitrário em 4, e
  - Obtém-se a fórmula nesse nome em 6

1	$\neg\ \forall y\ \exists x\ G(y,x)$	
2	$\quad \exists x\ \forall y\ G(y,x)$	
3	$\quad\quad a:\ \forall y\ G(y,a))$	
4	$\quad\quad\quad b:$	
6	$\quad\quad\quad \exists x\ G(b,x)$	
7	$\quad\quad \forall y\ \exists x\ G(y,x)$	Intr∀ : 4 - 6
8	$\quad \forall y\ \exists x\ G(y,x)$	Elim ∃ : 1 , 2 - 7
9	$\quad \perp$	Intr ⊥ : 1 - 8
10	$\neg\ \exists x\ \forall y\ G(y,x)$	Intr ¬ : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 3: $\{\neg \forall y\ \exists x\ G(y,x)\ \} \vdash_{DN} \neg\ \exists x\ \forall y\ G(y,x)$

- Para se obter a fórmula 6 teremos de obter a relação P entre um objecto e **b**. Mas esse objecto pode ser o objecto **a**, obtido por instanciação do ∀.
  - Elimina-se o ∀ em 3

1	$\neg\ \forall y\ \exists x\ G(y,x)$	
2	$\exists x\ \forall y\ G(y,x)$	
3	$a\!:\ \forall y\ G(y,a))$	
4	$b\!:$	
5	$G(b,a)$	Elim ∀ : 3
6	$\exists x\ G(b,x)$	Intr ∃ : 5
7	$\forall y\ \exists x\ G(y,x))$	Intr ∀ : 4 - 6
8	$\forall y\ \exists x\ G(y,x)$	Elim ∃ : 1 , 2 - 7
9	$\perp$	Intr ⊥ : 1 - 8
10	$\neg\ \exists x\ \forall y\ G(y,x)$	Intr ¬ : 2 - 9

Estratégias de Demonstração

- Podemos agora demonstrar resultados referentes a separação de quantificadores.

Exemplo 4: $\{\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)\} \vdash_{DN} \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$

- Pretende-se uma fórmula quantificada universalmente, pelo que deverá ser usada a regra de Introdução do ∀.
  - Assume-se um objecto **a** arbitrário em 2, e
  - Obtem-se a fórmula nesse nome em 9

```
1  | ∀x P(x) ∨  ∀x Q(x)
   |-----------------------
2  |  | a:
   |  |--------------------
   |  | ....
   |  |
9  |  | P(a) ∨ Q(a)
   |
10 | ∀x (P(x) ∨ Q(x))      Intr ∀ : 2 - 9
```

Estratégias de Demonstração

Exemplo 4: $\{\forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x)\} \vdash_{DN} \forall x\ (P(x) \lor Q(x))$

- A disjunção de a ser P ou Q é uma consequência da disjunção na fórmula 1, que poderemos obter através de cada um dos disjuntos, convenientemente instanciados.
  - Linhas 3 e 6: Assume-se cada um dos disjuntos, e
  - Linhas 5 e 8: Obtém-se a fórmula em ambos os casos

1	$\forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x)$	
2	$\quad a:$	
3	$\quad\quad \forall x\ P(x)$	
5	$\quad\quad P(a) \lor Q(a)$	
6	$\quad\quad \forall x\ Q(x)$	
8	$\quad\quad P(a) \lor Q(a)$	
9	$\quad P(a) \lor Q(a)$	Elim $\lor$: 1 , 3 – 5, 6 – 8
10	$\forall x\ (P(x) \lor Q(x))$	Intr $\forall$: 2 – 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 4: $\{\forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x)\} \vdash_{DN} \forall x\ (P(x) \lor Q(x))$

- Ambas as disjunções são fórmulas enfraquecidas do que se pode obter por instanciação de cada uma das hipóteses..
  - Linhas 4 e 7: Instanciam-se as hipóteses, e
  - Linhas 5 e 8: Obtem-se a fórmula por introdução da $\lor$

1	$\forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x)$	
2	a:	
3	$\forall x\ P(x)$	
4	$P(a)$	Elim $\forall$: 3
5	$P(a) \lor Q(a)$	Intr $\lor$: 4
6	$\forall x\ Q(x)$	
7	$Q(a)$	Elim $\forall$: 6
8	$P(a) \lor Q(a)$	Intr $\lor$: 7
9	$P(a) \lor Q(a)$	Elim $\lor$: 1 , 3 – 5, 6 – 8
10	$\forall x\ (P(x) \lor Q(x))$	Intr $\forall$: 2 – 9

Estratégias de Demonstração

- Podemos agora demonstrar outro resultado referente a separação de quantificadores.

Exemplo 4: $\{\ \exists x\ (P(x) \land Q(x))\ \} \vdash_{DN} \exists x\ P(x) \land \exists x\ Q(x)$

- Pretende-se uma fórmula conjuntiva, pelo que será usada a regra de Introdução da $\land$.
  - Linhas 5 e 9: Obtém-se cada um dos conjuntos
  - Linha 10: Introduz-se a $\land$

1	$\exists x\ (P(x) \land Q(x))$	
5	$\exists x\ P(x)$	
9	$\exists x\ Q(x)$	
10	$\exists x\ P(x) \land \exists x\ Q(x)$	Intr $\land$: 2 – 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 4: $\{\ \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))\ \} \vdash_{DN} \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$

- Existindo uma fórmula quantificada existencialmente podemos instanciá-la para obter cada uma das fórmulas 5 e 9.
  - Linhas 2 e 6: Atribui-se um nome, **a**, ao objecto existencialmente quantificado
  - Linhas 4 e 8: Obtêm-se as fórmulas 5 e 9, sem o nome atribuído

1	$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$	
2	a: $P(a) \wedge Q(a)$	
4	$\exists x\ P(x)$	
5	$\exists x\ P(x)$	Elim $\exists$: 1, 2 – 4
6	a: $P(a) \wedge Q(a)$	
8	$\exists x\ Q(x)$	
9	$\exists x\ Q(x)$	Elim $\exists$: 1, 6 – 8
10	$\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$	Intr $\wedge$: 2 – 9

Estratégias de Demonstração

Exemplo 4: $\{\ \exists x\ (P(x) \land Q(x))\ \} \mid\!-_{DN} \exists x\ P(x) \land \exists x\ Q(x)$

- As fórmulas existenciais podem ser obtidas em cada caso por eliminação do disjunto não relevante e instanciação existencial.
  - Linhas 3 e 7: Eliminam-se as conjunções de 2 e 6
  - Linhas 4 e 8: Introduzem-se os ∃s pretendidos

1	$\exists x\ (P(x) \land Q(x))$	
2	a: $P(a) \land Q(a)$	
3	$P(a)$	Elim $\land$: 2
4	$\exists x\ P(x)$	Intr $\exists$: 3
5	$\exists x\ P(x)$	Elim $\exists$: 1, 2 – 4
6	a: $P(a) \land Q(a)$	
7	$Q(a)$	Elim $\land$: 6
8	$\exists x\ Q(x)$	Intr $\exists$: 7
9	$\exists x\ P(x)$	Elim $\exists$: 1, 6 – 8
10	$\exists x\ P(x) \land \exists x\ Q(x)$	Intr $\land$: 2 – 9

Estratégias de Demonstração

- Por último demonstremos as leis de de Morgan de quantificadores (direcção mais "difícil")

Exemplo 5: $\{\neg \exists x\ P(x))\ \} \mid\!-_{DN} \forall x\ \neg\ P(x)$

- Apesar de se pretender uma fórmula quantificada universalmente, tentemos fazer uma demonstração por absurdo (na realidade a regra geral conduziria a uma demonstração mais simples; deixa-se como exercício).
  - Linha 2: Assume-se a negação da conclusão
  - Linha 9: Obtém-se o absurdo a fórmula nesse nome em 9
  - Linhas 10 e 11 : Nega-se a hipótese e elimina-se a dupla negação

1	$\neg\exists x\ P(x)$	
2	$\neg\ \forall x\ \neg\ P(x)$	
	....	
9	$\perp$	
10	$\neg\neg\ \forall x\ \neg\ P(x)$	Intr $\neg$: 2 - 9
11	$\forall x\ \neg\ P(x)$	Elim $\neg$: 10

Estratégias de Demonstração

Exemplo 5: $\{\neg \exists x\ P(x))\ \} \mid\!-_{DN} \forall x\ \neg\ P(x)$

- A contradição pode ser obtida obtendo-se a fórmula contrária à 2. Como a fórmula a obter é universalmente quantificada deve assumir-se um objecto arbitrário, **c**, e obter a fórmula nesse objecto.
  - Linhas 8 : Estabelece-se como meta a fórmula contrária a 2
  - Linhas 3 : Assume-se o objecto **c**
  - Linha 7: Obtém-se a fórmula em **c**

1	$\neg \exists x\ P(x)$	
2	$\quad \neg \forall x\ \neg\ P(x)$	
3	$\quad\quad c:$	
7	$\quad\quad \neg\ P(c)$	
8	$\quad \forall x\ \neg\ P(x)$	Intr $\forall$: 3 , 7
9	$\quad \perp$	Intr $\perp$: 2 , 8
10	$\neg\neg \forall x\ \neg\ P(x)$	Intr $\neg$: 2 - 9
11	$\forall x\ \neg\ P(x)$	Elim $\neg$: 10

Estratégias de Demonstração

Exemplo 5: $\{\neg \exists x\ P(x)\}\ \vdash_{DN} \forall x \neg P(x)$

- A fórmula que se deve obter é uma negação, podendo ser obtida por absurdo.
  - Linha 4: Assume-se a negação de 7
  - Linha 6: Estabelece-se como meta a contradição

1	$\neg \exists x\ P(x)$	
2	$\neg \forall x \neg P(x)$	
3	c:	
4	$P(c)$	
6	$\perp$	
7	$\neg P(c)$	Intr $\neg$: 4 - 6
8	$\forall x \neg P(x)$	Intr $\forall$: 3 , 7
9	$\perp$	Intr $\perp$: 2 , 8
10	$\neg\neg \forall x \neg P(x)$	Intr $\neg$: 2 - 9
11	$\forall x \neg P(x)$	Elim $\neg$: 10

Estratégias de Demonstração

Exemplo 5: $\{\neg \exists x\ P(x))\ \} \vdash_{DN} \forall x\ \neg\ P(x)$

- A contradição estabelece-se generalizando-se existencialmente a fórmula 4 e notando que ela é contrária à premissa.
  - Linha 5: Generaliza-se existencialmente 4

```
1  | ¬ ∃x P(x)
   |----------------------
2  |  | ¬ ∀x ¬ P(x)
   |  |-------------------
3  |  |  | c:
   |  |  |----------------
4  |  |  |  | P(c)
   |  |  |  |-------------
5  |  |  |  | ∃x P(x)          Intr ∃ : 4
6  |  |  |  | ⊥                Intr ⊥ : 1 , 5
7  |  |  | ¬ P(c)              Intr ¬ : 4 - 6
8  |  |  | ∀x ¬ P(x)           Intr ∀ : 3 , 7
9  |  | ⊥                      Intr ⊥ : 2 , 8
10 | ¬¬ ∀x ¬ P(x)              Intr ¬ : 2 - 9
11 | ∀x ¬ P(x)                 Elim ¬ : 10
```

Estratégias de Demonstração

- A outra lei de de Morgan obtem-se similarmente

Exemplo 6: $\{\neg\ \forall x\ P(x))\ \} \vdash_{DN} \exists x\ \neg\ P(x)$

- Pretendendo-se uma fórmula quantificada existencialmente, e não havendo qualquer objecto a quem se possam atribuir propriedades pela premissa, a demonstração por deve ser feita por absurdo.
  - Linha 2: Assume-se a negação da conclusão
  - Linha 10: Obtém-se o absurdo a fórmula nesse nome em 10
  - Linhas 11 e 12 : Nega-se a hipótese e elimina-se a dupla negação

```
1  | ¬∀x P(x)
   |---------------------
2  | | ¬ ∃x ¬ P(x)
   | |-----------------
   | |  ....
10 | |  ⊥
11 | ¬¬ ∃x ¬ P(x)          Intr ¬ : 2 - 9
12 | ∃x ¬ P(x)             Elim ¬ : 10
```

Estratégias de Demonstração

Exemplo 6: $\{\neg\ \forall x\ P(x))\ \} \mid\!-_{DN}\ \exists x\ \neg\ P(x)$

- A hipótese 2 indica que todos os objectos são P, o que contradiz a premissa. Assim a contradição obtém-se com a fórmula universalmente quantificada equivalente a 2:
  - Linha 9 : Estabelece-se como meta a fórmula contrária a 1
  - Linha 3 : Assume-se o objecto **c**
  - Linha 8: Obtém-se a fórmula em **c**

1	$\neg\forall x\ P(x)$	
2	$\quad \neg\ \exists x\ \neg\ P(x)$	
3	$\quad\quad c:$	
8	$\quad\quad P(c)$	
9	$\quad \forall x\ P(x)$	Intr $\forall$: 3 - 8
10	$\quad \bot$	Intr $\bot$: 1 - 9
11	$\neg\neg\ \exists x\ \neg\ P(x)$	Intr $\neg$: 2 - 10
12	$\exists x\ \neg\ P(x)$	Elim $\neg$: 10

Estratégias de Demonstração

Exemplo 6: $\{\neg\ \forall x\ P(x))\ \}\ \vdash_{DN} \exists x\ \neg\ P(x)$

- A meta intermédia 8 pode obter-se por absurdo, já que as hipóteses anteriores apenas estabelecem negações de propriedades.
  - Linhas 4 e 6 : Assume-se a fórmula negada e obtém-se a contradição
  - Linha 7: Obtém-se a fórmula duplamente negada

1	$\neg\forall x\ P(x)$	
2	$\neg\ \exists x\ \neg\ P(x)$	
3	c:	
4	$\neg P(c)$	
6	$\perp$	
7	$\neg\neg P(c)$	Intr $\neg$: 4 - 6
8	$P(c)$	Elim $\neg$: 7
9	$\forall x\ P(x)$	Intr $\forall$: 3 - 8
10	$\perp$	Intr $\perp$: 1 - 9
11	$\neg\neg\ \exists x\ \neg\ P(x)$	Intr $\neg$: 2 - 10
12	$\exists x\ \neg\ P(x)$	Elim $\neg$: 10

Estratégias de Demonstração

Exemplo 6: $\{\neg \forall x\ P(x))\ \} \mid\!-_{DN} \exists x\ \neg\ P(x)$

- A contradição estabelece-se entre as fórmulas 2 e 4, uma vez generalizada existencialmente.
  - Linha 5: Introduz-se o ∃ em 4

1	$\neg\forall x\ P(x)$	
2	$\neg\ \exists x\ \neg\ P(x)$	
3	$c:$	
4	$\neg\ P(c)$	
5	$\exists x\ \neg\ P(x)$	Intr ∃ : 4
6	$\bot$	Intr ⊥ : 2 , 5
7	$\neg\neg P(c)$	Intr ¬ : 4 - 6
8	$P(c)$	Elim ¬ : 7
9	$\forall x\ P(x)$	Intr ∀ : 3 - 8
10	$\bot$	Intr ⊥ : 1 - 9
11	$\neg\neg\ \exists x\ \neg\ P(x)$	Intr ¬ : 2 - 10
12	$\exists x\ \neg\ P(x)$	Elim ¬ : 10