Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2019 / 20 – Exame

Grupos para Avaliar
(Todos por Omissão)

G1	G2	G3	G4

Nome:	**nº:**

Grupo 1

(corresponde ao 1º teste)

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases

- O Rui conhece o Brasil mas não o Uruguai.
- O Rui e a Rosa moram em casas diferentes da mesma rua.
- O Rui e a Rosa não são ambos adultos.

a) Apresente uma assinatura Σ = <NP, $NF_0 \cup NF_1$> de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem corespondentes

NF_0: Constantes	*NF_1: Funções*	*NP: Predicados*
rui rosa brasil uruguai	ruaDe/1, casaDe/1	SerAdulto/1 Conhece/2 =/2

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O Rui conhece o Brasil mas não o Uruguai.

`Conhece(rui,brasil) ∧ ¬ Conhece(rui,uruguai)`

ii) O Rui e a Rosa moram em casas diferentes da mesma rua.

`ruaDe(casaDe(rui)) = ruaDe(casaDe(rosa)) ∧ (casaDe(rui) ≠ casaDe(rosa))`

iii) O Rui e a Rosa não são ambos adultos.

`¬ SerAdulto(rui) ∨ ¬ SerAdulto (rosa)`

1.2. (3 valores) Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica; V-FO: Verdade Lógica V-TW: Verdade Analítica (Tarski)

P-TT: Possibilidade Tautológica; P-FO: Possibilidade Lógica; P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski)

	V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
¬Cube(b)∧ Cube(a) ∧ a = b	N	N	N	S	N	N
¬SameShape(a,b) ∧ Dodec(a) ∧ Dodec(b)	N	N	N	S	S	N
¬SameSize(a,b) ∨ ¬Large(a) ∨ Large(b)	N	N	S	S	S	S

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (no Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ..., Premissa n } |= Conclusão	Val-TT	Val-FO	Val-TW
{ Tet(a), ¬ Tet(a)} ⊨ Smaller(c,b)	S	S	S
{ Cube(a), Dodec(a) } ⊨ Tet(a)	N	N	S
{ Tet(a) ∧ a = b)} ⊨ Tet(b)	N	S	S

1.4. (4 valores) Considere as fórmulas **P1:** $A \lor (B \land C)$ e **P2:** $A \land (B \lor C)$, bem como as fórmulas **C1:** $A \land (B \leftrightarrow \neg C)$ e **C2:** $(A \land B) \leftrightarrow C$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativas às fórmulas **P1**, **P2**, **C1** e **C2**.

A	B	C	$A \lor (B \land C)$		$A \land (B \lor C)$		$A \land (B \leftrightarrow \neg C)$			$(A \land B) \leftrightarrow C$	
V	**V**	**V**	**V**	V	**V**	V	**F**	F	F	V	**V**
V	**V**	**F**	**V**	F	**V**	V	**V**	V	V	V	**F**
V	**F**	**V**	**V**	F	**V**	V	**V**	V	F	F	**F**
V	**F**	**F**	**V**	F	**F**	F	**F**	F	V	F	**V**
F	**V**	**V**	**V**	V	**F**	V	**F**	F	F	F	**F**
F	**V**	**F**	**F**	F	**F**	V	**F**	V	V	F	**V**
F	**F**	**V**	**F**	F	**F**	V	**F**	V	F	F	**F**
F	**F**	**F**	**F**	F	**F**	F	**F**	F	V	F	**V**

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não consequências tautológicas das premissas **P1** e **P2**.

Justificação:
A fórmula C1 não é consequência tautológica das premissas P1 e P2 existe uma interpretação (A = B = C = Verdade) em que as premissas são verdadeiras e C1 é falsa.
A fórmula C2 é falsa nas interpretações (A = Verdade e B ≠ C) em que as premissas são verdadeiras. Assim sendo, C2 também não é consequência tautológica de P1 e P2.

1.5. **(5 valores)** Considere a fórmula $\neg(B \rightarrow (A \land C)) \land ((\neg A \lor \neg C) \rightarrow B)$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

$\neg(B \rightarrow (A \land C)) \land ((\neg A \lor \neg C) \rightarrow B)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg B \lor (A \land C)) \land (\neg(\neg A \lor \neg C) \lor B)$	Equivalência de $\rightarrow$
$\Leftrightarrow (\neg\neg B \land \neg(A \land C)) \land ((\neg\neg A \land \neg\neg C) \lor B)$	Leis de de Morgan
$\Leftrightarrow (B \land \neg(A \land C)) \land (A \land C) \lor B)$	Dupla Negação
$\Leftrightarrow (B \land \neg(A \land C) \land (A \land C)) \lor (B \land \neg(A \land C) \land B)$	Distribuição
$\Leftrightarrow (B \land F) \lor (B \land \neg(A \land C)) \land B)$	Contradição
$\Leftrightarrow F \lor (B \land \neg(A \land C)) \land B)$	Elemento Absorvente
$\Leftrightarrow B \land \neg(A \land C)) \land B$	Elemento Neutro
$\Leftrightarrow B \land B \land \neg(A \land C)$	Comutatividade
$\Leftrightarrow B \land \neg(A \land C)$	Idempotência
$\Leftrightarrow B \land (\neg A \lor \neg C)$	Leis de Morgan

Esta fórmula já está em CNF

$\Leftrightarrow (B \land \neg A) \lor (B \land \neg C)$	Distribuição

Esta fórmula está em DNF

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Os objetos **a** e **b** não são ambos cubos mas um deles é (um cubo).

`¬ (Cube(a) ↔ Cube(b))`

b) O menor dos blocos b e c é um cubo.

`(Smaller(b,c) → Cube(b)) ∧ (Smaller(c,b) → Cube(c))`

c) Os blocos **a** e **b** não estão na mesma linha, mas um deles está na mesma linha do cubo **c**.

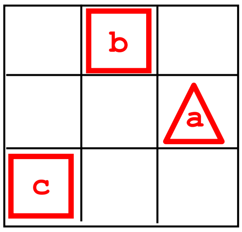
`Cube(c) ∧ ¬SameRow(a,b) ∧ (SameRow(a,c) ∨ SameRow(b,c))`

d) O bloco **c** só é um tetraedro se estiver entre os blocos **a** e **b**.

`Tet(c) → Between(c,a,b)`

2.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. `SameShape(b,c) ∧ ¬SameShape(a,c)`
2. `¬(¬LeftOf(c,b) ∨ ¬RightOf(a,b))`
3. `¬FrontOf(a,b) → SameShape(a,b)`
4. `Tet(a) ∧ ¬Dodec(b)`
5. `FrontOf(c,a) ↔ FrontOf(a,b)`



2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respetiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas

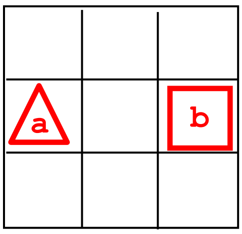
1.	¬ (Tet(a) → Dodec(b))	
2.	Tet(a) ∨ ¬Dodec(b)	
3.	| Tet(a)	
4.	| ~~Dodec~~(b)	Elim ∨ : 2
5.	Tet(a) → Dodec(b)	Intr →: 3, 4
6.	⊥	Intr ⊥ : 1, 5
7.	¬Tet(a)	Intr ~~¬~~: 6

Erro(s):

No passo 4, não se pode aplicar a regra de eliminação da disjunção. De facto, não se pode deduzir a fórmula `Dodec(b)`, o que vai invalidar a demonstração.

No passo 7, a fórmula pode ser inferida, mas a regra que deveria ser invocada é a eliminação da ⊥.

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido.



2.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1.	¬(B → C)	
2.	(A ∧ B) → C	
3.	¬C	
4.	¬B	
5.	B	
6.	⊥	Intr ⊥ : 4, 5
7.	C	Elim ⊥ : 6
8.	B → C	Intr → : 5 - 7
9.	⊥	Intr ⊥ : 1, 8
10.	¬¬B	Intr ¬ : 4 - 9
11.	B	Elim ¬ : 10
12.	A	
13.	A ∧ B	Intr ∧ : 11, 12
14.	C	Elim → : 2, 13
15.	⊥	Intr ⊥ : 3 , 14
16.	¬A	Intr ¬ : 12 - 15
17.	¬C → ¬A	Intr → : 3 - 16

2.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

1.	A → (B ∨ C)	
2.	¬B ∧ ¬C	
3.	A	
4.	B ∨ C	Elim → : 1, 3
5.	B	
6.	¬B	Elim ∧ : 2
7.	⊥	Intr ⊥ : 5 , 6
8.	C	
9.	¬C	Elim ∧ : 2
10.	⊥	Intr ⊥ : 8 , 9
11.	⊥	Elim ∨ : 4, 5 – 7, 8 - 10
12.	¬A	Intr ¬ : 3 - 11

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Só há blocos grandes entre um cubo e um tetraedro.

∀x (Large(x) → ∃y ∃z (Tet(y) ∧ Cube(z) ∧ Between(x,y,z)))

b) Nem todos os cubos são grandes ou pequenos.

∃x (Cube(x) ∧ ¬ Large(x) ∧ ¬ Small(x))

c) Não há tetraedros com o mesmo tamanho de dodecaedros.

¬∃x ∃y (Tet(x) ∧ Dodec(y) ∧ SameSize(x,y))

d) Os tetraedros estão à direita de todos os cubos menos do **c**.

Cube(c) ∧ ∀x ∀y ((Tet(x) ∧ Cube(y) ∧ y ≠ c) → RightOf(x,y))

e) Existe um tetraedro que está ao lado de alguns dos cubos que não têm blocos à sua frente.

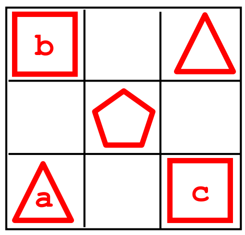
∃x (Tet(x) ∧ ∃y (Cube(y) ∧ ¬∃z FrontOf(z,y) ∧ Adjoins(x,y)))

f) Todos os blocos maiores são cubos.

∀x ((∀y ¬ Larger(y,x)) → Cube(x))

3.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. FrontOf(a,b) ∧ LeftOf(a,c) ∧ ¬ Dodec(a)
2. ∃x (Tet(x) ∧ RightOf(x,b)) ∧ ∃y (Tet(y) ∧ FrontOf(y,b))
3. ∃x (Dodec(x) ∧ ∀y (y ≠ x → (¬SameRow(x,y)∧¬SameRow(x,y))))
4. ¬ Tet(b) ∧ ∃x (Cube(x) ∧ FrontOf(x,b))
5. ¬ Dodec(b) ∧ ∃x (Tet(x) ∧ x ≠ b ∧ SameRow(x,b))
6. ∀x (Dodec(x) → ∃y (Cube(y) ∧ Between(x,b,y))



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1	∀x (Cube(x) → Large(x))
2	¬∃x (Dodec(x)∧¬Medium(x))
3	∃x Small(x) → ∃y Tet(x)

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☐ ∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))
- ☐ ¬ ∃x (Large(x) ∧ Medium(x))
- ☒ ¬ ∃x (Large(x) ∧ Small(x))
- ☒ ¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))
- ☒ ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
- ☐ ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))
- ☐ ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))
- ☐ ¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

```
 1  | ∀x (Cube(x) → (Large(x) ∨ ∃y Adjoins(x,y)))
 2  | ∀x ∀y ¬ Adjoins(x,y)
    |----------------------------------------------
 3. |  | ¬ ∃x Large(x)
    |  |--------------------
 4. |  |  | ∃y Cube(y)
    |  |  |--------------------
 5. |  |  |  | c: cube(c)
    |  |  |  |--------------------
 6. |  |  |  | Cube(c)→ (Large(c)∨∃y Adjoins(c,y))Elim ∀ : 1
 7. |  |  |  | Large(c) ∨ ∃y Adjoins(c,y)         Elim → : 5, 6
 8. |  |  |  |  | Large(c)
    |  |  |  |  |--------------------
 9. |  |  |  |  | ∃x Large(x)                      Intr ∃ : 8
10. |  |  |  |  | ⊥                                Intr ⊥ : 3, 9
11. |  |  |  |  | ∃y Adjoins(c,y)
    |  |  |  |  |--------------------
12. |  |  |  |  |  | a: Adjoins(c,a)
    |  |  |  |  |  |--------------------
13. |  |  |  |  |  | ¬ Adjoins(c,a)                Elim ∀ : 2
14. |  |  |  |  |  | ⊥                             Intr ⊥ : 12, 13
15. |  |  |  |  | ⊥                                Elim ∃ : 11, 12 - 14
16. |  |  |  | ⊥                                   Elim ∨ : 7, 8 - 10, 11 - 15
17. |  |  | ⊥                                      Elim ∃ : 4, 5 - 16
18. |  | ¬ ∃y Cube(y)                              Intr ¬ : 4 - 17
19. | ¬∃x Large(x) → ¬∃y Cube(y)                  Intr → : 3 - 18
```

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

```
 1 | ∀x ((Cube(x) ∧ ¬ ∃y FrontOf(y,x)) → Large(x))
 2 | ¬ ∃x Large(x)
   |----------------------------------------------
 3 |  | c:
   |  |--------------------
 4 |  |  | Cube(c)
   |  |  |--------------------
 5 |  |  | (Cube(c) ∧ ¬ ∃y FrontOf(y,c)) → Large(c)   Elim ∀: 1, 4
 6 |  |  |  | ¬ ∃y FrontOf(y,c))
   |  |  |  |--------------------
 7 |  |  |  | Cube(c) ∧ ¬ ∃y FrontOf(y,c)             Intr ∧ : 4, 6
 8 |  |  |  | Large(c)                                Elim→ : 5, 7
 9 |  |  |  | ∃x Large(x)                             Intr ∃ : 8
10 |  |  |  | ⊥                                       Intr ⊥ : 2 , 9
11 |  |  | ¬¬∃y FrontOf(y,c)                          Intr ¬ : 6 - 10
12 |  |  | ∃y FrontOf(y,c)                            Elim ¬ : 11
13 |  | Cube(c) → ∃y FrontOf(y,c)                     Intr→ : 4 - 12
14 | ∀x (Cube(x) → ∃y FrontOf(y,x))                   Intr ∀ : 3 - 13
```

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível.

1. E → ⊥	5. (B ∧ D) → F
2. (A ∧ B) → C	6. B → C
3. T → B	7. (B ∧ C) → D
4 (D ∧ F) → E	8. A →⊥

A cláusula 3 impõe **B = True**; a cláusula 6, **C = True**; a cláusula 7, **D = True**; a cláusula 5, **F = True**; finalmente a cláusula 4 impõe **E = True.**

Mas então a cláusula 1 impõe a contradição, pelo que o sistema não é satisfazível.

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

1.	¬(B → (A ∧ C)
2.	(A ∧ B) → C
X	(B ∨ C) → ¬ A

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

1	B	(P1)
2	¬A ∨ ¬ C	(P1)
3	¬A ∨ ¬B ∨ C	(P2)
4	B ∨ C	(¬X)
5	A	(¬X)

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

6	¬ C	Res 5, 2
7	¬A ∨ ¬B	Res 6, 3
8	¬A	Res 7, 1
9	□	Res 8, 5

4.3. **(2 valores)** Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) ¬∀x (Cube(x) → ∃y (Tet(y) ∧ Adjoins(x,y)))

∃x ∀y [Cube(x) ∧ (¬Tet(y) ∨ ¬Adjoins (x,y))]

b) ∃x (Cube(x) ∧ ∀y (Tet(y) → LeftOf(x,y)))

∃x ∀y [Cube(x) ∧ (¬Tet(y) ∨ LeftOf(x,y))]

4.4. **(1 valor)** Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

∀x ((Cube(x) ∧ ∀y SameCol(x,y)) → (Small(x) ∧ ∃z SameSize(x,z)))

1. ¬Cube(x1) ∨ ¬SameCol(x1, f(x1)) ∨ Small(x1)
2. ¬Cube(x2) ∨ ¬SameCol(x2, f(x2)) ∨ SameSize(x2,g(x2))

4.5. **(5 valores)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	∀x (Cube(x) → (∃y FrontOf(y,x) ∧ Large(x)))
P2	∀x (Large (x) → (¬∃y FrontOf(y,x) ∨ ∃z Adjoins(z,x)))
C.	∀x (Cube(x) → (∃y Adjoins(y,x) ∨ Small(x)))

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

1. ¬ Cube(x1) ∨ FrontOf(f(x1),x1)
2. ¬ Cube(x2) ∨ Large(x2)
3. ¬ Large(x3) ∨ ¬ FrontOf(y3,x3) ∨ Adjoins(g(x3, y3),x3)
4. Cube(c)
5. ¬ Adjoins(y5,c)
6. ¬ Small(c)

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

7. ¬ Large(c) ∨ ¬ FrontOf(y3,c)	Res	5, 3 { x3 / c, y5 / g(c, y3) }
8. ¬ Cube(c) ∨ ¬ Large(c)	Res	7, 1 { x1 / c, y3 / f(c) }
9. ¬ Large(c)	Res	8, 4 { }
10. ¬ Cube(c)	Res	9, 2 { x2 / c }
11. □	Res	10, 4 { }

4.6. **(5 valores)** Como pode verificar, P(3) = (1-1/2²) + (1-1/3²) + (1-1/4²) = ¾*8/9*15/16 = 5/8. Mais geralmente, prove por indução que para n >= 2, P(n) $= \prod_{i=2}^{n}(1-\frac{1}{i^2}) = \frac{n+1}{2n}$.

Passo Base: n = 2

Para n = 2 temos P(2) = (1-1/2²)= 3/4 = (2+1)/(2*2)

Passo de Indução:

P(n) = n+1/2n => P(n+1) = ((n+1)+1)/(2(n+1)) = (n+2)/(2(n+1))

Ora,

P(n+1) = (1-1/2²) * (1-1/3²) * ... * (1-1/n²) * (1-1/(n+1)²)
= [(n+1)/(2*n)] * [((n+1)²-1)/(n+1)²]
= ((n+1)²-1) / (2*n*(n+1))
= (n² + 2n) / (2*n*(n+1))
= (n*(n+2)) / (2*n*(n+1))
= (n+2) / (2(n+1))

q.e.d.