

# Lógica Computacional

---

Estratégias de Demonstração no Sistema DN

Regras Heurísticas

Exemplos

# Estratégias de Demonstração

---

- Sendo demonstrável que o sistema DN é coerente e completo, existe a garantia de que qualquer consequência-lógica (FO) é demonstrável no sistema DN.
- No entanto, esta garantia não fornece pistas sobre como podem ser obtidas essas demonstrações.
- Embora não existam procedimentos determinísticos, existem heurísticas que geralmente guiam de uma forma conveniente as demonstrações e indicam quais as regras do sistema a utilizar em cada instante.
- Para além das regras indicadas para o sistema DNp (sem quantificadores) podem incluir-se
  - Se a fórmula a demonstrar é universalmente quantificada utilizar a regras de introdução do  $\forall$
  - Se já existe uma fórmula existencialmente quantificada utilizar a regras de eliminação do  $\exists$ .
  - Nos casos em que não existem outras pistas, tentar o raciocínio por absurdo
- Alguns exemplos irão ilustrar a estratégia a utilizar

# Estratégias de Demonstração

---

## Exemplo:

$$\{ \forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{LeftOf}(x, a)), \forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{RightOf}(x, a)) \}$$
$$\vdash_{\text{DN}} \forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$$

1		$\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{LeftOf}(x, a))$
2		$\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{RightOf}(x, a))$
<hr/>		
		$\forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$

- Para demonstrar a conclusão exclusivamente através de regras do sistema DN, teremos de incluir nas premissas conhecimento sobre o mundo dos blocos, nomeadamente:

- Estar na mesma coluna é incompatível com estar à direita
- Estar na mesma coluna é incompatível com estar à esquerda
- Só existem três formas: tetraedro, cubo e dodecaedro

# Estratégias de Demonstração

---

- Este conhecimento está expresso nos axiomas de Tarski que são adicionados como premissas na demonstração.

a1	$\forall x (\text{Tet}(x) \vee \text{Cube}(x) \vee \text{Dodec}(x))$
a2	$\forall x \forall y \neg (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{LeftOf}(x, y))$
a3	$\forall x \forall y \neg (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{RightOf}(x, y))$
1	$\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{LeftOf}(x, a))$
2	$\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{RightOf}(x, a))$
<hr/>	
30	$\forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$

- A partir deste momento, a demonstração faz-se exclusivamente através de regras do sistema DN.
- Para esse efeito é conveniente utilizar algumas regras heurísticas para obter a demonstração pretendida, como se fará de seguida.

# Estratégias de Demonstração

- Sendo a frase a demonstrar universalmente quantificada, deverá utilizar-se a regra da introdução do  $\forall$ . Assim
  - Linha 3: assume-se a existência de um objecto,  $c$ , arbitrário
  - Linha 29: obtém-se a fórmula pretendida nesse objecto
  - Linha 30: justifica-se a fórmula obtida

```
a1 |  $\forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$ 
a2 |  $\forall x \forall y \neg (SameCol(x,y) \wedge LeftOf(x,y))$ 
a3 |  $\forall x \forall y \neg (SameCol(x,y) \wedge RightOf(x,y))$ 
1  |  $\forall x (Dodec(x) \rightarrow LeftOf(x, a))$ 
2  |  $\forall x (Tet(x) \rightarrow RightOf(x, a))$ 
3  | -----
   | | c:
   | | -----
   | | ...
29 | | SameCol(c, a)  $\rightarrow$  Cube(c)
30 |  $\forall x (SameCol(x, a) \rightarrow Cube(x))$  Intr  $\forall$ : 3 - 29
```

# Estratégias de Demonstração

- Sendo a frase a demonstrar na linha 29 uma implicação, deverá utilizar-se a regra da introdução do operador  $\rightarrow$ . Assim
  - Linha 4: assume-se a existência do implicante
  - Linha 28: obtém-se a fórmula do implicado
  - Linha 29: justifica-se a fórmula obtida

a1		$\forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$	
a2		$\forall x \forall y \neg (SameCol(x, y) \wedge LeftOf(x, y))$	
a3		$\forall x \forall y \neg (SameCol(x, y) \wedge RightOf(x, y))$	
1		$\forall x (Dodec(x) \rightarrow LeftOf(x, a))$	
2		$\forall x (Tet(x) \rightarrow RightOf(x, a))$	
3		c:	
4		SameCol(c, a)	
		...	
28		Cube(c)	
29		$SameCol(c, a) \rightarrow Cube(c)$	<b>Intr <math>\rightarrow</math> : 4 - 28</b>
30		$\forall x (SameCol(x, a) \rightarrow Cube(x))$	<b>Intr <math>\forall</math> : 3 - 29</b>

# Estratégias de Demonstração

- A estratégia a seguir para demonstrar que  $c$  é um cubo (linha 28), passa por :
  - Linha 11: demonstrar que não é um dodecaedro
  - Linha 18: demonstrar que não é um tetraedro

```
a1  |   $\forall x ((Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$ 
a2  |   $\forall x \forall y \neg (SameCol(x,y) \wedge LeftOf(x,y))$ 
a3  |   $\forall x \forall y \neg (SameCol(x,y) \wedge RightOf(x,y))$ 
1   |   $\forall x (Dodec(x) \rightarrow LeftOf(x, a))$ 
2   |   $\forall x (Tet(x) \rightarrow RightOf(x, a))$ 
-----
3   |  |  c:
4   |  |  |  SameCol(c, a)
      |  |  |  ...
11  |  |  |   $\neg Dodec(c)$ 
      |  |  |  ...
18  |  |  |   $\neg Tet(c)$ 
      |  |  |  ...
28  |  |  |  Cube(c)
29  |  |  |  SameCol(c, a)  $\rightarrow$  Cube(c)           Intr  $\rightarrow$  : 4 - 28
30  |  |  |   $\forall x (SameCol(x, a) \rightarrow Cube(x))$    Intr  $\forall$ : 3 - 29
```

# Estratégias de Demonstração

- A demonstração de que  $c$  não é um dodecaedro pode fazer-se por *Modus Tollens* (na implicação da linha 1) e por absurdo (com a instanciação do axioma **a2** na linha 5)

a2	$\forall x \forall y \neg (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{LeftOf}(x, y))$	
1	$\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{LeftOf}(x, a))$	
...		
4	$\text{SameCol}(c, a)$	
5	$\neg (\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{LeftOf}(c, a))$	Elim $\forall$ : a2 (2X)
6	$\text{Dodec}(c)$	
7	$\text{Dodec}(c) \rightarrow \text{LeftOf}(c, a)$	Elim $\forall$ : 1
8	$\text{LeftOf}(c, a)$	Elim $\rightarrow$ : 6 , 7
9	$\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{LeftOf}(c, a)$	Intr $\wedge$ : 4 , 8
10	$\perp$	Intr $\perp$ : 5 - 9
11	$\neg \text{Dodec}(c)$	Intr $\neg$ : 6 - 10
...		
30	$\forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$	



# Estratégias de Demonstração

- A demonstração de que  $c$  não é um tetraedro é semelhante e passa utiliza o *Modus Tollens* (na implicação da linha 2) e o absurdo (com a instanciação do axioma **a3** na linha 12)

a3	$\forall x \forall y \neg (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{RightOf}(x, y))$	
2	$\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{RightOf}(x, a))$	
1	...	
4	$\text{SameCol}(c, a)$	
5	$\neg (\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{RightOf}(c, a))$	Elim $\forall$ : a3 (2X)
12	$\text{Tet}(c)$	
13	$\text{Tet}(c) \rightarrow \text{RightOf}(c, a)$	Elim $\forall$ : 2
14	$\text{RightOf}(c, a)$	Elim $\rightarrow$ : 12 , 13
15	$\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{RightOf}(c, a)$	Intr $\wedge$ : 4 , 14
16	$\perp$	Intr $\perp$ : 5 , 15
18	$\neg \text{Tet}(c)$	Intr $\neg$ : 13 - 16
	...	
30	$\forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$	

# Estratégias de Demonstração

- Finalmente a demonstração de que **c** é um cubo faz-se através do raciocínio por casos, a partir da disjunção obtida na linha 19 por instanciação do axioma **a1**.

<b>a1</b>	$\forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$	
	...	
<b>11</b>	$\neg Dodec(c)$	
	...	
<b>18</b>	$\neg Tet(c)$	
<b>19</b>	$Tet(c) \vee Cube(c) \vee Dodec(c)$	Elim $\forall$ : a1
<b>20</b>	$Tet(c)$	
<b>21</b>	$\perp$	Intr $\perp$ : 18 , 20
<b>22</b>	$Cube(c)$	Elim $\perp$ : 21
<b>23</b>	$Cube(c)$	
<b>24</b>	$Cube(c)$	Reit : 23
<b>25</b>	$Dodec(c)$	
<b>26</b>	$\perp$	Intr $\perp$ : 11 , 25
<b>27</b>	$Cube(c)$	Elim $\perp$ : 26
<b>28</b>	$Cube(c)$	Elim : 19, 20-22 , 23 -24, 25-27
	...	

# Estratégias de Demonstração

---

**Exemplo 2:**  $\{ \exists x \forall y G(y, x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall y \exists x G(y, x)$

- Sabendo que existe um objecto com uma dada propriedade podemos começar por nomeá-lo, e construir a prova por eliminação do  $\exists$ .
  - Linhas 2 e 6: Seja **a** o objecto indicado pela linha 1.

1		$\exists x \forall y G(y, x)$	
2		<b>a: <math>\forall y G(y, a)</math></b>	
6		<b><math>\forall y \exists x G(y, x)</math></b>	
7		$\forall y \exists x G(y, x)$	<b>Elim <math>\exists</math> : 1, 2 - 6</b>

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 2:**  $\{ \exists x \forall y G(y, x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall y \exists x G(y, x)$

- Sendo a fórmula 6 a demonstrar universalmente quantificada, deverá utilizar-se a regra da introdução do  $\forall$ . Assim
  - Linha 3: assume-se a existência de um objecto, **b**, arbitrário
  - Linha 5: obtém-se a fórmula pretendida nesse objecto

1	$\exists x \forall y G(y, x)$	
2	$a: \forall y G(y, a)$	
3	<b>b:</b>	
5	<b><math>\exists x G(b, x)</math></b>	
6	$\forall y \exists x G(y, x)$	<b>Intr <math>\forall</math> : 3 - 5</b>
7	$\forall y \exists x G(y, x)$	<b>Elim <math>\exists</math> : 1, 2 - 6</b>

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 2:**  $\{ \exists x \forall y G(y, x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall y \exists x G(y, x)$

- Finalmente, para obter a fórmula 5 teremos de obter a relação P entre algum bloco e o bloco **b**. Mas esse objecto pode ser o bloco **a**.

- Linha 4: instancia-se a fórmula quantificada universalmente em 2.

1		$\exists x \forall y G(y, x)$			
2			$a: \forall y G(y, a)$		
3				$b:$	
4				$G(b, a)$	<b>Elim <math>\forall</math> : 2</b>
5				$\exists x G(b, x)$	<b>Intr <math>\exists</math> : 4</b>
6			$\forall y \exists x G(y, x)$	<b>Intr <math>\forall</math> : 1, 2 - 6</b>	
7		$\forall y \exists x G(y, x)$	<b>Elim <math>\exists</math> : 1, 2 - 6</b>		

- Uma vez feita esta demonstração podemos igualmente demonstrar a sua “contrapositiva”.

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 3:**  $\{\neg\forall y \exists x G(y, x)\} \vdash_{\text{DN}} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Pretendendo obter uma fórmula negada, deveremos usar a regra de Introdução da  $\neg$ .
  - Linha 2 e 9: assume-se a negação da fórmula e obtem-se a  $\perp$

1		$\neg \forall y \exists x G(y, x)$	
2		$\exists x \forall y G(y, x)$	
		...	
9		$\perp$	
10		$\neg \exists x \forall y G(y, x)$	<b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 9</b>

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 3:**  $\{\neg \forall y \exists x G(y, x)\} \vdash_{\text{DN}} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Havendo um objecto com uma dada propriedade (linha 2) podemos nomeá-lo.
  - Seja **a** o objecto indicado pela linha 2.

1		$\neg \forall y \exists x G(y, x)$		
2			$\exists x \forall y G(y, x)$	
3				<b>a: <math>\forall y G(y, a)</math></b>
9				$\perp$
10		$\neg \exists x \forall y G(y, x)$	Intr $\neg$ : 2 - 9	

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 3:**  $\{ \neg \forall y \exists x G(y, x) \} \mid \neg_{DN} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- A contradição em 9 advém do bloco a estar em P com todos os blocos e a fórmula 1 que diz que não existe nenhum bloco para o qual não existem blocos em P com ele.
  - Linha 8: Obtenha-se a contradição da fórmula 1

1	$\neg \forall y \exists x G(y, x)$	
2	$\exists x \forall y G(y, x)$	
3	a: $\forall y G(y, a)$	
	.....	
8	$\forall y \exists x G(y, x)$	
9	$\perp$	Intr $\perp$ : 1 - 8
10	$\neg \exists x \forall y G(y, x)$	Intr $\neg$ : 2 - 9



# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 3:**  $\{\neg \forall y \exists x G(y, x)\} \mid \neg_{DN} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Querendo obter em 8 uma fórmula que não contem o nome **a**, essa fórmula deverá ser obtida por eliminação do  $\exists$ .
  - Obtenha-se a fórmula sem o nome **a** em 7

1	$\neg \forall y \exists x G(y, x)$	
2	$\exists x \forall y G(y, x)$	
3	$a: \forall y G(y, a)$	
	...	
7	$\forall y \exists x G(y, x)$	
8	$\forall y \exists x G(y, x)$	<b>Elim <math>\exists</math> : 2 , 3 - 7</b>
9	$\perp$	<b>Intr <math>\perp</math> : 1 - 8</b>
10	$\neg \exists x \forall y G(y, x)$	<b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 9</b>

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 3:**  $\{ \neg \forall y \exists x G(y, x) \} \mid \neg_{DN} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Em 7 pretende-se uma fórmula quantificada universalmente, pelo que deverá ser usada a regra de Introdução do  $\forall$ .
  - Assume-se **b** arbitrário em 4, e
  - Obtém-se a fórmula nesse nome em 6

1	$\neg \forall y \exists x G(y, x)$	
2	$\exists x \forall y G(y, x)$	
3	$a: \forall y G(y, a)$	
4	$b:$	
6	$\exists x G(b, x)$	
7	$\forall y \exists x G(y, x)$	<b>Intr<math>\forall</math> : 4 - 6</b>
8	$\forall y \exists x G(y, x)$	<b>Elim<math>\exists</math> : 1 , 2 - 7</b>
9	$\perp$	<b>Intr<math>\perp</math> : 1 - 8</b>
10	$\neg \exists x \forall y G(y, x)$	<b>Intr<math>\neg</math> : 2 - 9</b>

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 3:**  $\{\neg \forall y \exists x G(y, x)\} \mid \neg_{DN} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Para se obter a fórmula 6 teremos de obter a relação P entre um objecto e **b**. Mas esse objecto pode ser o objecto **a**, obtido por instanciação do  $\forall$ .
  - Elimina-se o  $\forall$  em 3

1	$\neg \forall y \exists x G(y, x)$	
2	$\exists x \forall y G(y, x)$	
3	$a: \forall y G(y, a)$	
4	$b:$	
5	$G(b, a)$	$\text{Elim } \forall : 3$
6	$\exists x G(b, x)$	$\text{Intr } \exists : 5$
7	$\forall y \exists x G(y, x)$	$\text{Intr } \forall : 4 - 6$
8	$\forall y \exists x G(y, x)$	$\text{Elim } \exists : 1, 2 - 7$
9	$\perp$	$\text{Intr } \perp : 1 - 8$
10	$\neg \exists x \forall y G(y, x)$	$\text{Intr } \neg : 2 - 9$

# Estratégias de Demonstração

- Podemos agora demonstrar resultados referentes a separação de quantificadores.

**Exemplo 4:**  $\{ \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall x (P(x) \vee Q(x))$

- Pretende-se uma fórmula quantificada universalmente, pelo que deverá ser usada a regra de Introdução do  $\forall$ .
  - Assume-se um objecto  $a$  arbitrário em 2, e
  - Obtem-se a fórmula nesse nome em 9

1		$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$	
2		$a:$	
		.....	
9		$P(a) \vee Q(a)$	
10		$\forall x (P(x) \vee Q(x))$	$\text{Intr } \forall : 2 - 9$

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 4:**  $\{ \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall x (P(x) \vee Q(x))$

- A disjunção de a ser P ou Q é uma consequência da disjunção na fórmula 1, que poderemos obter através de cada um dos disjuntos, convenientemente instanciados.
  - Linhas 3 e 6: Assume-se cada um dos disjuntos, e
  - Linhas 5 e 8: Obtém-se a fórmula em ambos os casos

1	$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$	
2	a:	
3	$\forall x P(x)$	
5	$P(a) \vee Q(a)$	
6	$\forall x Q(x)$	
8	$P(a) \vee Q(a)$	
9	$P(a) \vee Q(a)$	<b>Elim <math>\vee</math> : 1 , 3 - 5, 6 - 8</b>
10	$\forall x (P(x) \vee Q(x))$	<b>Intr <math>\forall</math> : 2 - 9</b>

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 4:**  $\{ \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall x (P(x) \vee Q(x))$

- Ambas as disjunções são fórmulas enfraquecidas do que se pode obter por instanciação de cada uma das hipóteses..
  - Linhas 4 e 7: Instanciam-se as hipóteses, e
  - Linhas 5 e 8: Obtem-se a fórmula por introdução da  $\vee$

1	$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$	
2	a:	
3	$\forall x P(x)$	
4	P(a)	Elim $\forall$ : 3
5	P(a) $\vee$ Q(a)	Intr $\vee$ : 4
6	$\forall x Q(x)$	
7	Q(a)	Elim $\forall$ : 6
8	P(a) $\vee$ Q(a)	Intr $\vee$ : 7
9	P(a) $\vee$ Q(a)	Elim $\vee$ : 1 , 3 - 5, 6 - 8
10	$\forall x (P(x) \vee Q(x))$	Intr $\forall$ : 2 - 9

# Estratégias de Demonstração

---

- Podemos agora demonstrar outro resultado referente a separação de quantificadores.

**Exemplo 4:**  $\{ \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \} \vdash_{\text{DN}} \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

- Pretende-se uma fórmula conjuntiva, pelo que será usada a regra de Introdução da  $\wedge$ .
  - Linhas 5 e 9: Obtém-se cada um dos conjuntos
  - Linha 10: Introdúz-se a  $\wedge$

1		$\exists x (P(x) \wedge Q(x))$	
5		$\exists x P(x)$	
9		$\exists x Q(x)$	
10		$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	Intr $\wedge$ : 2 - 9

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 4:**  $\{ \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \} \vdash_{\text{DN}} \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

- Existindo uma fórmula quantificada existencialmente podemos instanciá-la para obter cada uma das fórmulas 5 e 9.
  - Linhas 2 e 6: Atribui-se um nome, **a**, ao objecto existencialmente quantificado
  - Linhas 4 e 8: Obtêm-se as fórmulas 5 e 9, sem o nome atribuído

1	$\exists x (P(x) \wedge Q(x))$	
2	$a: P(a) \wedge Q(a)$	
4	$\exists x P(x)$	
5	$\exists x P(x)$	Elim $\exists$ : 1, 2 - 4
6	$a: P(a) \wedge Q(a)$	
8	$\exists x Q(x)$	
9	$\exists x Q(x)$	Elim $\exists$ : 1, 6 - 8
10	$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	Intr $\wedge$ : 5 - 9



# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 4:**  $\{ \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \} \vdash_{\text{DN}} \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

- As fórmulas existenciais podem ser obtidas em cada caso por eliminação do disjuncto não relevante e instanciação existencial.
  - Linhas 3 e 7: Eliminam-se as conjunções de 2 e 6
  - Linhas 4 e 8: Introduzem-se os  $\exists$ s pretendidos

1	$\exists x (P(x) \wedge Q(x))$	
2	$a: P(a) \wedge Q(a)$	
3	$P(a)$	Elim $\wedge$ : 2
4	$\exists x P(x)$	Intr $\exists$ : 3
5	$\exists x P(x)$	Elim $\exists$ : 1, 2 - 4
6	$a: P(a) \wedge Q(a)$	
7	$Q(a)$	Elim $\wedge$ : 6
8	$\exists x Q(x)$	Intr $\exists$ : 7
9	$\exists x P(x)$	Elim $\exists$ : 1, 6 - 8
10	$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	Intr $\wedge$ : 2 - 9

# Estratégias de Demonstração

- Por último demonstramos as leis de de Morgan de quantificadores (d direcção mais “difícil”)

**Exemplo 5:**  $\{\neg \exists x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \forall x \neg P(x)$

- Apesar de se pretender uma fórmula quantificada universalmente, tentemos fazer uma demonstração por absurdo (na realidade a regra geral conduziria a uma demonstração mais simples; deixa-se como exercício).
  - Linha 2: Assume-se a negação da conclusão
  - Linha 9: Obtém-se o absurdo a fórmula nesse nome em 9
  - Linhas 10 e 11 : Nega-se a hipótese e elimina-se a dupla negação

1	$\neg \exists x P(x)$	
2	$\neg \forall x \neg P(x)$	
	...	
9	$\perp$	
10	$\neg \neg \forall x \neg P(x)$	Intr $\neg$ : 2 - 9
11	$\forall x \neg P(x)$	Elim $\neg$ : 10

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 5:**  $\{\neg \exists x P(x)\} \mid \neg_{DN} \forall x \neg P(x)$

- A contradição pode ser obtida obtendo-se a fórmula contrária à 2. Como a fórmula a obter é universalmente quantificada deve assumir-se um objecto arbitrário,  $c$ , e obter a fórmula nesse objecto.

- Linhas 8 : Estabelece-se como meta a fórmula contrária a 2
- Linhas 3 : Assume-se o objecto  $c$
- Linha 7: Obtém-se a fórmula em  $c$

1		$\neg \exists x P(x)$	
2		$\neg \forall x \neg P(x)$	
3		$c:$	
7		$\neg P(c)$	
8		$\forall x \neg P(x)$	Intr $\forall$ : 3 , 7
9		$\perp$	Intr $\perp$ : 2 , 8
10		$\neg \neg \forall x \neg P(x)$	Intr $\neg$ : 2 - 9
11		$\forall x \neg P(x)$	Elim $\neg$ : 10

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 5:**  $\{\neg \exists x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \forall x \neg P(x)$

- A fórmula que se deve obter é uma negação, podendo ser obtida por absurdo.

- Linha 4: Assume-se a negação de 7
- Linha 6: Estabelece-se como meta a contradição

1		$\neg \exists x P(x)$				
2			$\neg \forall x \neg P(x)$			
3				c:		
4					$P(c)$	
6					$\perp$	
7					$\neg P(c)$	Intr $\neg$ : 4 - 6
8					$\forall x \neg P(x)$	Intr $\forall$ : 3 , 7
9					$\perp$	Intr $\perp$ : 2 , 8
10					$\neg \neg \forall x \neg P(x)$	Intr $\neg$ : 2 - 9
11					$\forall x \neg P(x)$	Elim $\neg$ : 10

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 5:**  $\{\neg \exists x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \forall x \neg P(x)$

- A contradição estabelece-se generalizando-se existencialmente a fórmula 4 e notando que ela é contrária à premissa.
  - Linha 5: Generaliza-se existencialmente 4

1	$\neg \exists x P(x)$	
2	$\neg \forall x \neg P(x)$	
3	$c:$	
4	$P(c)$	
5	$\exists x P(x)$	Intr $\exists$ : 4
6	$\perp$	Intr $\perp$ : 1 , 5
7	$\neg P(c)$	Intr $\neg$ : 4 - 6
8	$\forall x \neg P(x)$	Intr $\forall$ : 3 , 7
9	$\perp$	Intr $\perp$ : 2 , 8
10	$\neg \forall x \neg P(x)$	Intr $\neg$ : 2 - 9
11	$\forall x \neg P(x)$	Elim $\neg$ : 10

# Estratégias de Demonstração

- A outra lei de de Morgan obtem-se similarmente

**Exemplo 6:**  $\{\neg \forall x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \exists x \neg P(x)$

- Pretendendo-se uma fórmula quantificada existencialmente, e não havendo qualquer objecto a quem se possam atribuir propriedades pela premissa, a demonstração por deve ser feita por absurdo.

- Linha 2: Assume-se a negação da conclusão
- Linha 10: Obtém-se o absurdo a fórmula nesse nome em 10
- Linhas 11 e 12 : Nega-se a hipótese e elimina-se a dupla negação

1	$\neg \forall x P(x)$	
2	$\neg \exists x \neg P(x)$	
	...	
10	$\perp$	
11	$\neg \neg \exists x \neg P(x)$	Intr $\neg$ : 2 - 9
12	$\exists x \neg P(x)$	Elim $\neg$ : 10

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 6:**  $\{\neg \forall x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \exists x \neg P(x)$

- A hipótese 2 indica que todos os objectos são P, o que contradiz a premissa. Assim a contradição obtém-se com a fórmula universalmente quantificada equivalente a 2:
  - Linha 9 : Estabelece-se como meta a fórmula contrária a 1
  - Linha 3 : Assume-se o objecto **c**
  - Linha 8: Obtém-se a fórmula em **c**

1	$\neg \forall x P(x)$	
2	$\neg \exists x \neg P(x)$	
3	<b>c:</b>	
8	<b>P(c)</b>	
9	<b><math>\forall x P(x)</math></b>	<b>Intr <math>\forall</math> : 3 - 8</b>
10	<b><math>\perp</math></b>	<b>Intr <math>\perp</math> : 1 - 9</b>
11	$\neg \neg \exists x \neg P(x)$	<b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 10</b>
12	$\exists x \neg P(x)$	<b>Elim <math>\neg</math> : 10</b>

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 6:**  $\{\neg \forall x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \exists x \neg P(x)$

- A meta intermédia 8 pode obter-se por absurdo, já que as hipóteses anteriores apenas estabelecem negações de propriedades.
  - Linhas 4 e 6 : Assume-se a fórmula negada e obtém-se a contradição
  - Linha 7: Obtém-se a fórmula duplamente negada

1	$\neg \forall x P(x)$	
2	$\neg \exists x \neg P(x)$	
3	c:	
4	$\neg P(c)$	
6	$\perp$	
7	$\neg \neg P(c)$	<b>Intr <math>\neg</math> : 4 - 6</b>
8	$P(c)$	<b>Elim <math>\neg</math> : 7</b>
9	$\forall x P(x)$	<b>Intr <math>\forall</math> : 3 - 8</b>
10	$\perp$	<b>Intr <math>\perp</math> : 1 - 9</b>
11	$\neg \neg \exists x \neg P(x)$	<b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 10</b>
12	$\exists x \neg P(x)$	<b>Elim <math>\neg</math> : 10</b>



# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 6:**  $\{\neg \forall x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \exists x \neg P(x)$

- A contradição estabelece-se entre as fórmulas 2 e 4, uma vez generalizada existencialmente.

- Linha 5: Introduce-se o  $\exists$  em 4

1	$\neg \forall x P(x)$	
2	$\neg \exists x \neg P(x)$	
3	c:	
4	$\neg P(c)$	
5	$\exists x \neg P(x)$	Intr $\exists$ : 4
6	$\perp$	Intr $\perp$ : 2 , 5
7	$\neg \neg P(c)$	Intr $\neg$ : 4 - 6
8	$P(c)$	Elim $\neg$ : 7
9	$\forall x P(x)$	Intr $\forall$ : 3 - 8
10	$\perp$	Intr $\perp$ : 1 - 9
11	$\neg \neg \exists x \neg P(x)$	Intr $\neg$ : 2 - 10
12	$\exists x \neg P(x)$	Elim $\neg$ : 10