Modus Ponens e Modus Tollens

- Uma vez incluído o operador de implicação no sistema de Dedução Natural, há que definir regras para a sua introdução e de eliminação, tal como foi feito para os outros operadores.
- Essas regras deverão ser baseadas em padrões de raciocínio usados no dia a dia e podem ser ilustrados através de exemplos.

Exemplo 1:

Se o Tareco for um gato então ele mia. O Tareco é um gato. Logo ...

O Tareco mia.

- Este é um clássico exemplo de ***Modus Ponens***, e que ilustra o raciocínio mais óbvio que se pode fazer com frases condicionais. Se uma implicação é verdadeira e se o implicante é verdadeiro, então o implicado também o será.
- Similarmente, se o implicado é falso (e a implicação verdadeira) então é o implicante que tem de ser falso. Esta regra do ***Modus Tollens*** pode ser ilustrada através do

Exemplo 2:

Se o Tareco for um gato então ele mia. Mas o Tareco não mia. Logo ...

O Tareco não é um gato.

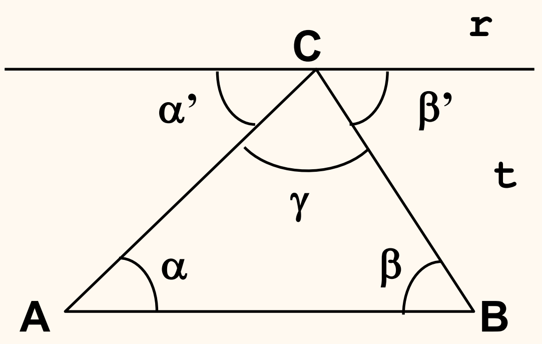
Raciocínio Hipotético

- Uma regra de inferência mais complexa é a que envolve a criação de frases condicionais. Estas permitem "condensar" um conjunto de passos de inferência que não nos interessa repetir cada vez que raciocinamos. Podemos exemplificar esta situação com a demonstração de um qualquer teorema como por exemplo.

- **Exemplo:**
  A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º .

- A demonstração pode ser algo como:

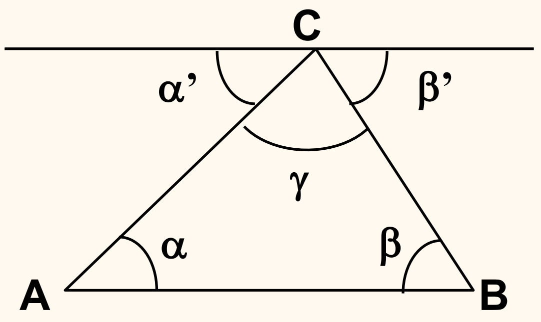
  i. Seja t um triângulo:
  ii. Consideremos a recta r paralela ao lado AB do triângulo t que passa no ponto C.
  iii. Por serem definidos por rectas paralelas, os ângulos α e β serão iguais aos ângulos α' e β'
  iv. Assim $\alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma$.
  v. Como α', β' e γ formam um ângulo raso, a soma dos ângulos α', β' e γ é 180º.



Raciocínio Hipotético

- Esta demonstração pode ser esquematizada “a la Fitch” da seguinte forma

Seja t um triângulo
A recta r é paralela ao lado AB do triângulo t e passa no ponto C.
Os ângulos α e β serão iguais aos ângulos α’e β‘
Assim $\alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma$
Mas $\alpha'+\beta'+\gamma = 180^{o}$
A soma dos ângulos de t é 180º



- De notar que nesta demonstração não se infere que **t** é um triângulo, pois isso é apenas uma hipótese: “seja t um triângulo...”. O que se pode inferir é que, *independentemente de t ser ou não um triângulo*,

“Se t for um triângulo então a soma dos seus ângulos internos é de 180º”.

Seja t um triângulo
A recta r é paralela ao lado AB do triângulo t e passa no ponto C.
. . .
A soma dos ângulos de t é 180º

Se t for um triângulo então a soma dos seus ângulos internos é de 180º

Eliminação da Implicação

- Estamos pois em condições de formalizar, no sistema de Dedução Natural, as regras de Introdução e de Eliminação da Implicação.

- A regra de Eliminação da Implicação corresponde ao padrão de raciocínio do ***Modus Ponens***.

- Já a introdução da implicação corresponde ao **Raciocínio Hipotético**

Eliminação da $\rightarrow$

	...	
k1	φ	
	...	
k2	$\varphi \rightarrow \psi$	
	...	
k	ψ	**Elim $\rightarrow$: k1, k2**
	...	

Nota:
k1 < k
k2 < k

Introdução da $\rightarrow$

	...	
k1	φ	
	...	
k2	ψ	
k	$\varphi \rightarrow \psi$	**Intr $\rightarrow$: k1-k2**
	...	

Padrões de Raciocínio com Implicações

- **Modus Tollens:**

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$

1	$\varphi \to \psi$	
2	$\neg\psi$	
3	φ	
4	ψ	Elim $\to$: 1, 3
5	$\perp$	Intr $\perp$: 2, 4
6	$\neg\varphi$	Intr $\neg$: 3 - 5

- **Contrapositiva**

$\{\varphi \to \psi\} \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$

1	$\varphi \to \psi$	
2	$\neg\psi$	
3	φ	
4	ψ	Elim $\to$: 1, 3
5	$\perp$	Intr $\perp$: 2, 4
6	$\neg\varphi$	Intr $\neg$: 3 - 5
7	$\neg\psi \to \neg\varphi$	Intr $\to$: 2 - 6

Padrões de Raciocínio com Implicações

- **Dilema Construtivo:**

$$\{\varphi \vee \psi,\ \varphi \rightarrow \alpha,\ \psi \rightarrow \beta\} \vdash \alpha \vee \beta$$

1	$\varphi \vee \psi$	
2	$\varphi \rightarrow \alpha$	
3	$\psi \rightarrow \beta$	
4	φ	
5	α	Elim $\rightarrow$: 2, 4
6	$\alpha \vee \beta$	Intr $\vee$: 5
7	ψ	
8	β	Elim $\rightarrow$: 3, 7
9	$\alpha \vee \beta$	Intr $\vee$: 8
10	$\alpha \vee \beta$	Elim $\vee$: 1, 4-6, 7-9

- **Enfraquecimento do Consequente**

$$\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \varphi \rightarrow (\psi \vee \phi)$$

1	$\varphi \rightarrow \psi$	
2	φ	
3	ψ	Elim $\rightarrow$: 1, 2
4	$\psi \vee \phi$	Intr $\vee$: 1, 3
5	$\varphi \rightarrow (\psi \vee \phi)$	Intr $\rightarrow$: 2 - 6

- **Fortalecimento do Antecedente**

$$\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\varphi \wedge \phi) \rightarrow \psi$$

Regras do Operador de Equivalência

- Dada que uma equivalência corresponde à implicação nos dois sentidos, as regras de introdução e de eliminação do operador de equivalência correspondem a uma "duplicação" das do operador de implicação.

Eliminação da $\leftrightarrow$

```
    | ...
k1  | φ
    | ...
k2  | φ ↔ ψ
    | ...
k   | ψ       Elim ↔: k1,k2
    | ...
```

ou

```
    | ...
k1  | ψ
    | ...
k2  | φ ↔ ψ
    | ...
k   | φ       Elim ↔: k1,k2
    | ...
```

Introdução da $\leftrightarrow$

```
    | ...
k1  | | φ
    | |----
    | | ...
k2  | | ψ
    | ...
k3  | | ψ
    | |----
    | | ...
k4  | | φ
k   | φ ↔ ψ   Intr ↔: k1-k2, k3-k4
    | ...
```

```
Nota:
   k > k1
   k > k2
   k > k3
   k > k4
```

Padrões de Raciocínio com Equivalências

- Transitividade da Equivalência

$$\{\varphi \leftrightarrow \psi \,,\, \psi \leftrightarrow \phi\} \vdash \varphi \leftrightarrow \phi$$

1	$\varphi \leftrightarrow \psi$	
2	$\psi \leftrightarrow \phi$	
3	$\quad \varphi$	
4	$\quad \psi$	Elim ↔: 1, 3
5	$\quad \phi$	Elim ↔: 2, 4
6	$\quad \phi$	
7	$\quad \psi$	Elim ↔: 2, 6
8	$\quad \varphi$	Elim ↔: 1, 7
9	$\varphi \leftrightarrow \phi$	Intr ↔: 3-5, 6-8

- Tal como a equivalência, também a implicação é transitiva:

$$\{\varphi \rightarrow \psi \,,\, \psi \rightarrow \phi\} \vdash \varphi \rightarrow \phi$$

o que se poderia provar como para a equivalência (mas sem necessitar da “duplicação” da sub-demonstração).

Implicação e Dedução

- Como já deve ter sido notado existe uma relação estreita entre a implicação e a noção de dedução.

- Se a partir de um conjunto de hipóteses Φ, e de uma hipótese adicional φ se puder deduzir uma fórmula ψ, então também a partir das hipóteses iniciais se pode deduzir a fórmula $\varphi \rightarrow \psi$, isto é

$$\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

- Com efeito, essencialmente a mesma demonstração pode ser utilizada em ambos os casos, como se indica de seguida

| Φ
| φ
|———
| . . .
| ψ

| Φ
|———
| | φ
| |———
| | . . .
| | ψ
| $\varphi \rightarrow \psi$

Dedução e Consequência Tautológica

- Uma constatação semelhante poderia ser feita entre a implicação e a consequência tautológica

$$\Phi \cup \{\varphi\} \models_T \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi \models_T \varphi \to \psi$$

que como sabemos pode ser aferida através do método da tabelas de verdade.

$\Rightarrow$ Consideremos a tabela da direita. Se se verifica $\Phi \cup \{\varphi\} \models_T \psi$, então quando Φ e φ são verdade também o deve ser ψ.

Assim, nas linhas em que Φ é verdade, também a fórmula $\varphi \to \psi$ o é .

Φ	φ	ψ	$\varphi \to \psi$
V	V	V	V
V	F	X	V
~~F~~	~~V~~	~~X~~	~~?~~
~~F~~	~~F~~	~~X~~	~~V~~

Φ	φ	ψ	$\varphi \to \psi$
V	V	V	V
~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~F~~
~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~V~~
~~V~~	~~F~~	~~F~~	~~V~~

$\Leftarrow$ Se a condição $\Phi \models_T \varphi \to \psi$ se verifica, então quando Φ é verdade também o deve ser $\varphi \to \psi$ (à esquerda).

Nessas linhas, se forem verdadeiras Φ e φ também o é ψ .

Sistemas de Dedução Natural Proposicional: T e DNp

- Mais interessante é verificar a relação entre demonstrações num sistema formal e a validade de uma argumentação, ou seja avaliar a **coerência** e **completude** do sistema.

- Assumamos que num sistema formal $\mathcal{F}$ se pode demonstrar uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas dadas Φ.

- Nestas condições diz-se que o sistema $\mathcal{F}$ é **coerente** apenas se a fórmula φ fôr uma consequência das premissas Φ.

- Como temos estado a definir, o sistema **DN *proposicional* (DNp)** contém regras de inferência de introdução e eliminação de

			e ainda a
$\wedge$ Conjunção	$\neg$ Negação	$\rightarrow$ Implicação	
$\vee$ Disjunção	$\perp$ Contradição	$\leftrightarrow$ Equivalência	= Igualdade

- No entanto vamos considerar o sistema proposicional **T**, que é o sistema de dedução natural **DNp** mas sem as regras da igualdade.

$\wedge$ Conjunção	$\neg$ Negação	$\rightarrow$ Implicação
$\vee$ Disjunção	$\perp$ Contradição	$\leftrightarrow$ Equivalência

Sistema T de Dedução Natural : Coerência

- Um sistema $\mathcal{F}$ é **coerente** se toda a fórmula φ demonstrável através das regras do sistema é uma consequência das premissas Φ.

- Mas há vários tipos de consequências (tautológicas, lógicas e analíticas) sendo necessário precisar qual a que se considera no estudo da coerência de um sistema. Em particular, pode provar-se que

- **Coerência do sistema T**:

  O sistema restrito de dedução natural T, é *tautológicamente* coerente.

- Este teorema pode demonstrar-se mostrando que qualquer fórmula que ocorre numa demonstração no sistema T, excepto as hipóteses consideradas em algumas regras (e.g. Intr $\neg$ ou Intr $\rightarrow$), é uma consequência tautológica das premissas.

- Essa demonstração pode ser feita por ***absurdo***: nenhuma fórmula numa demonstração pode ser a **primeira** que não é consequência tautológica das premissas.

- Como existem 12 regras, podemos demonstrar o absurdo ***por casos***: em nenhum dos casos a fórmula introduzida pode ser a primeira que não é consequência tautológica das premissas. Vejamos alguns casos.

Sistema T de Dedução Natural: Coerência

- **Caso 1:** A primeira fórmula incoerente numa demonstração não pode ser obtida na Introdução da Conjunção.

	Φ
	. . .
	$\phi 1$
	. . .
	$\phi 2$
	. . .
k1	α
	. . .
	φ
	. . .
k2	β
	. . .
	ψ
	. . .
k	$\alpha \land \beta$ **Intr $\land$: k1, k2**

- Por hipótese, seja k: $\alpha \land \beta$ a primeira fórmula que é "incoerente" na demonstração.
- Considerando o seu contexto, então existe uma situação em que Φ, φ e ψ são todas verdadeiras mas em que a fórmula $\alpha \land \beta$ não o é.
- Como a primeira incoerência ocorre em k, as fórmulas k1 e k2 são "coerentes". Mas então
  - Se todas as Φ são verdadeiras, α também é;
  - Se todas as Φ e φ são verdadeiras, β também é;
- Logo, se todas as Φ e φ são verdadeiras então também o é $\alpha \land \beta$, o que contraria à hipótese.
- Assim, a primeira fórmula incoerente não pode ser obtida por Introdução da Conjunção.

Sistema T de Dedução Natural: Coerência

- **Caso 2:** A primeira fórmula incoerente numa demonstração não pode ser obtida na Introdução da Implicação.

Φ
. . .
$\phi 1$
. . .
$\phi 2$
. . .
ψ
. . .
φ
. . .
k1 α
. . .
k2 β
k $\alpha \rightarrow \beta$ **Intr $\rightarrow$: k1, k2**

- Por hipótese, seja k: $\alpha \rightarrow \beta$ a primeira fórmula que é "incoerente" na demonstração.
- Considerando o seu contexto, então existe uma situação em que todas as Φ e φ são verdadeiras mas em que a fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ não o é.
- Como a primeira incoerência ocorre em k, a fórmula k2 é "coerente". Mas então
  - Se todas as todas as Φ, φ e α são verdadeiras, β também é;
- Logo, se todas as Φ e φ são verdadeiras então também o é $\alpha \rightarrow \beta$, o que contraria à hipótese.
- Assim, a primeira fórmula incoerente não pode ser obtida por Introdução da Implicação.

Sistema T de Dedução Natural: Completude

- As outras 10 regras do sistema T podem ser analisadas de forma similar, demonstrando-se assim a coerência do sistema T, isto é .

$$\Phi \vdash_T \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \models_T \varphi$$

- A recíproca da coerência é a completude.

- Um sistema $\mathcal{F}$ é **completo** se toda a fórmula φ que é uma consequência das premissas Φ é demonstrável no sistema.

- **Completude do sistema T**:
  O sistema restrito de dedução natural T, é *tautológicamente* completo.

$$\Phi \models_T \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash_T \varphi$$

Sistema DNp : Coerência e Completude

- Como o sistema T não inclui as regras de introdução e eliminação da igualdade ele não é naturalmente completo logicamente (embora seja coerente obviamente). Assim, há fórmulas que são consequências lógicas das premissas e não podem ser deduzidas em T. Por exemplo

$\{C(a), a = b\} \models_{FO} C(b)$ mas **não** $\{C(a), a = b\} \vdash_{T} C(b)$

- No exemplo acima, a demonstração podia fazer-se facilmente com a regra de Eliminação da Igualdade, e portanto

$\{C(a), a = b\} \models_{FO} C(b)$ e $\{C(a), a = b\} \vdash_{DNp} C(b)$

- Na realidade pode demonstrar-se a generalização dos teoremas anteriores para o caso em que consideramos consequências lógicas, isto é

Coerência e Completude do sistema DNp:

- O sistema restrito de dedução natural DNp, é *lógicamente* coerente e completo para a lógica proposicional.