Lógica Computacional

Completetude de Operadores Booleanos

Formas Normais a partir de Tabelas de Verdade

Frases Condicionais

Operador de Implicação (material)

Completude dos Operadores Booleanos

- Tendo já considerado os operadores Booleanos de Negação, Conjunção e Disjunção, bem como as regras de inferência que os introduzem e eliminam no sistema de dedução natural, podemos colocar-nos as questões:
    1. Serão estes operadores **suficientes**?
    2. Serão estes operadores **necessários**?

- Como veremos a resposta a estas questões não é inequívoca. De facto, ela depende dos objectivos que se pretendem atingir, nomeadamente

- **Poder de Expressão:** Assumindo que todas as operações Booleanas são funcionais, os operadores de conjunção, disjunção e negação são suficientes. De facto eles são mais do que suficientes, pois *não são todos* necessários.

- **Naturalidade de Representação:** Em língua natural, é comum utilizar frases *condicionais* do tipo "se o polígono **a** é um quadrado, ele tem 4 lados". Estas frases não são representadas *naturalmente* pelos operadores Booleanos já considerados, faltando um operador (de implicação) para exprimir essa condicionalidade.

Completude dos Operadores Booleanos

- Podemos provar facilmente que os operadores Booleanos são suficientes para exprimir qualquer **função** Booleana. Para isso basta fazer a sua tabela de verdade e representar a função pretendida numa das suas formas normais (DNF ou CNF). O exemplo seguinte ilustra esse processo .

A	B	C	φ(A,B,C)
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

Para obter a forma DNF de uma função φ a partir da tabela de verdade, basta escrever a disjunção dos monómios que são verdadeiros nas linhas em que a função é verdadeira.

$$\begin{aligned}\varphi = &\ (A \wedge B \wedge C)\\ \vee &\ (A \wedge B \wedge \neg C)\\ \vee &\ (A \wedge \neg B \wedge \neg C)\\ \vee &\ (\neg A \wedge B \wedge \neg C)\end{aligned}$$

Completude dos Operadores Booleanos

- Igualmente poderíamos obter a forma CNF duma função arbitrária como a anterior.

A	B	C	φ(A,B,C)
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

Para obter a forma CNF de uma função de uma função φ a partir da tabela de verdade, basta escrever a conjunção das cláusulas que são falsas nas linhas em que a função é falsa.

$$\begin{aligned}\varphi = &(\neg A \lor B \lor \neg C)\\ \land &(A \lor \neg B \lor \neg C)\\ \land &(A \lor B \lor \neg C)\\ \land &(A \lor B \lor C)\end{aligned}$$

- Desta forma, todas as funções Booleanas se podem representar por fórmulas Booleanas escritas nas suas formas normais, que apenas utilizam os operadores de conjunção, disjunção e negação.

Completude dos Operadores Booleanos

- Na realidade, aplicando a dupla negação às formas normais verificamos que todas as funções poderiam ser escritas apenas com os operadores de conjunção e negação ou com os operadores de disjunção e negação

$$\begin{aligned}\varphi = & \ (A \wedge B \wedge C) \\ & \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \\ & \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \\ & \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}\neg\neg\varphi = & \ \neg(\neg(A \wedge B \wedge C) \\ & \wedge \neg(A \wedge B \wedge \neg C) \\ & \wedge \neg(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \\ & \wedge \neg(\neg A \wedge B \wedge \neg C))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi = & \ (\neg A \vee B \vee \neg C) \\ & \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \\ & \wedge (A \vee B \vee \neg C) \\ & \wedge (A \vee B \vee C)\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}\neg\neg\varphi = & \ \neg(\neg(\neg A \vee B \vee \neg C) \\ & \vee \neg(A \vee \neg B \vee \neg C) \\ & \vee \neg(A \vee B \vee \neg C) \\ & \vee \neg(A \vee B \vee C))\end{aligned}$$

- Assim os conjuntos de funções $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são **funcionalmente completos**, isto é, qualquer função Booleana pode ser escrita numa fórmula que apenas utiliza operadores de um desses conjuntos completos.

Completude dos Operadores Booleanos

- Existem ainda conjuntos completos com um só operador. Com efeito, os operadores "não_e" (↓) e "não_ou" (↑), definidos como a negação da conjunção e da disjunção constituem conjuntos completos:

$$A \downarrow B =_{def} \neg(A \wedge B)$$
$$A \uparrow B =_{def} \neg(A \vee B)$$

Para o provar basta notar que com estes operadores,

i. Se pode exprimir a negação

$$\neg A = \neg(A \wedge A) = A \downarrow A$$
$$\neg A = \neg(A \vee A) = A \uparrow A$$

ii. Se pode exprimir a conjunção

$$A \wedge B = \neg\neg(A \wedge B) = \neg (A \downarrow B) = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$$
$$A \wedge B = \neg\neg(A \wedge B) = \neg(\neg A \vee \neg B) = (\neg A \uparrow \neg B) = (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$$

iii. Se pode exprimir a disjunção

$$A \vee B = \neg\neg(A \vee B) = \neg(\neg A \wedge \neg B) = (\neg A \downarrow \neg B) = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$$
$$A \vee B = \neg\neg(A \vee B) = \neg (A \uparrow B) = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$$

Naturalidade da Representação

- Apesar de o conjunto de operadores Booleanos já definidos ser completo, muitas frases em língua natural são mais facilmente traduzidas para fórmulas de primeira ordem (FPOs) se se introduzir o operador de implicação ($\rightarrow$).

Exemplo: Se o Tareco é um animal **então** ele respira.

Com a assinatura Σ = <SP, SF> onde SP = {Animal/1 e Respira/1} e SF = {tareco/0}, a frase condicional acima pode ser representada pela FPO

$$\mathtt{Animal(tareco)} \rightarrow \mathtt{Respira(tareco)}$$

- Antes de analisarmos em mais detalhe as propriedades deste novo operador Booleano, notemos que frases condicionais podem ser expressas de várias formas, pelo que deveremos assentar numa forma equivalente "**se A então B**", que seja facilmente expressa pelo operador $\rightarrow$.

Condicionais Simples: Operador de Implicação

- Os exemplos seguintes mostram diferentes formas de exprimir frases condicionais bem como a sua forma “equivalente”.

1. **Se:** O Tareco respira se for um animal.

   Forma “Equivalente”: Se o Tareco é um animal **então** ele respira

   $$\texttt{Animal(tareco)} \rightarrow \texttt{Respira(tareco)}$$

2. **Apenas se, só se:** O Tareco fala apenas se for humano (ou “O Tareco só fala se ...”)

   Forma “Equivalente” 1: Se não for humano **então** o Tareco não fala

   $$\neg\texttt{Humano(tareco)} \rightarrow \neg\texttt{Fala(tareco)}$$

   Forma “Equivalente” 2: Se o Tareco fala **então** é humano

   $$\texttt{Fala(tareco)} \rightarrow \texttt{Humano(tareco)}$$

Condicionais Simples: Operador de Implicação

3. A menos que, excepto, : O Tareco arranha a menos que seja manso.

ou

O Tareco arranha excepto se for manso.

Forma “equivalente” 1: **Se** não fôr manso **então** o Tareco arranha

$$\neg \, \mathbf{Manso(tareco)} \rightarrow \mathbf{Arranha(tareco)}$$

Forma “equivalente” 2: **Se** não arranha **então** o Tareco é manso

$$\neg \, \mathbf{Arranha(tareco)} \rightarrow \mathbf{Manso(tareco)}$$

- No entanto as formas abaixo **não** são equivalentes (como se analisará melhor no fim)

Forma “**não** equivalente” 1**:** **Se** fôr manso **então** o Tareco não arranha

$$\mathbf{Manso(tareco)} \rightarrow \neg \, \mathbf{Arranha(tareco)}$$

Forma “**não** equivalente” **2:** **Se** arranha **então** o Tareco não é manso

$$\mathbf{Arranha(tareco)} \rightarrow \neg \, \mathbf{Manso(tareco)}$$

Bicondicionais: Condições Necessária e Suficiente

- Numa frase condicional distinguem-se duas frases componentes: a frase condicionante e a condicionada, ou equivalentemente a frase implicante e a frase implicada.

- Por vezes a implicação ocorre nos dois sentidos, correspondendo ao que vulgarmente se chama condição necessária e suficiente.

Exemplo: O Tareco respira **se** e **apenas se** for um animal. ✗

1. **Condição suficiente (se) :** Para o Tareco respirar **é suficiente** que seja animal. ✓

   O Tareco respira **se** for um animal; ou

   Se o Tareco é um animal **então** ele respira.

   `Animal(tareco)` $\rightarrow$ **`Respira(tareco)`**

2. **Condição necessária (só se):** Para respirar **é necessário** que o Tareco seja animal ✗

   Tareco respira **apenas se** for um animal.

   Se o Tareco respira então ele é um animal.

   `Respira(tareco)` $\rightarrow$ **`Animal (tareco)`**

Bicondicionais e Operador de Equivalência

- As frases bicondicionais podem ser assim representadas por uma conjunção de duas fórmulas implicativas, ou mais compactamente pelo operador de equivalência ($\leftrightarrow$).

Exemplo: O Tareco respira **se e apenas se** for um ser vivo.

- Em vez da conjunção de duas implicações

$$(\mathbf{SerVivo(tareco)} \rightarrow \mathbf{Respira(tareco)}) \\ \wedge \\ (\mathbf{Respira(tareco)} \rightarrow \mathbf{SerVivo(tareco)})$$

a frase pode ser representada pelo operador de equivalência

$$\mathbf{SerVivo(tareco)} \leftrightarrow \mathbf{Respira(tareco)}$$

Implicação e Implicatura

- Muitas vezes pretende-se com uma frase condicional, i.e. com a forma de uma implicação, transmitir a ideia de uma dupla implicação. Estas situações dependem muito do estilo linguístico utilizado e do contexto em que ocorrem.

Exemplo 1: Se o Tareco é um gato **então** ele mia.

$$\mathtt{Gato(tareco)} \rightarrow \mathtt{Mia(tareco)}$$

ou

$$\mathtt{Gato(tareco)} \leftrightarrow \mathtt{Mia(tareco)}$$

- A implicação "sugerida" implicitamente tem sido chamada de implicatura e pode ser avaliada se acrescentarmos algo como " ... e o inverso também é verdade".

Exemplo 1:

Se o Tareco é um gato **então** ele mia ... e se mia então é um gato (**!**)

$$\mathtt{Gato(tareco)} \leftrightarrow \mathtt{Mia(tareco)}$$

Exemplo 2:

Se o Tareco é um gato **então** ele respira ... e se respira então é um gato (**?**)

$$\mathtt{Gato(tareco)} \rightarrow \mathtt{Respira(tareco)}$$

Funcionalidade da Implicação (?) : Justificações

- Por vezes a funcionalidade da implicação não é clara ou é mesmo inexistente. Os seguintes exemplos ilustram esta situação, nomeadamente as dificuldades encontradas ou não no preenchimento das respectivas tabelas de verdade.

Exemplo 1: Se o Tareco vai para casa **então** ele tem fome.

C(t)	F(t)	C(t) →? F(t)
V	V	V/F
V	F	V/F
F	V	?
F	F	?

- Neste caso, em que a condição representa uma justificação, e pode ser substituída por um "porque" ("O Tareco vai para casa **porque** ele tem fome") o valor de verdade da frase composta não pode ser inferida do valor de verdade dos componentes!

- Mesmo que o Tareco esteja a ir para casa ele pode ir por outro motivo!

Funcionalidade da Implicação (?) : Contrafactuais

- Noutros casos estamos interessados em “imaginar” o que se passaria em determinadas condições, mesmo que saibamos que elas não se verificam.

- Essa é a situação de um “contrafactual”, como o exemplificado abaixo.

Exemplo 1: Se o Tareco fosse um cão **então** ele ladrava / zurrava.

C(t)	L(t)	C(t) →? L(t)
V	V	-
V	F	-
F	V	V
F	F	F

C(t)	Z(t)	C(t) →? Z(t)
V	V	-
V	F	-
F	V	F
F	F	V

- Como pode ser verificado, por um lado não estamos interessados em saber o que se passaria se o implicante for verdadeiro (ele nunca o será!).

- Por outro lado, a verdade do contrafactual depende não dos valores de verdade dos implicante e implicado, mas sim da relação entre eles.

- De facto, um cão ladraria mas não zurraria, fosse ou não fosse o Tareco um cão.

Implicação Material - Funcionalidade

- Independentemente das utilizações linguísticas mais complexas que são usadas no dia a dia e que não são captadas pela Lógica em FPOs (Fórmulas de 1ª Ordem) a utilização mais vulgar das frases condicionais pode ser traduzida numa FPO com o auxílio do operador de implicação (material).

- Como qualquer outro operador Booleano, é necessário definir a função Booleana que implementa, que pode ser apresentada através da seguinte tabela de verdade

Se φ então ψ

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

Implicação Material - Funcionalidade

Se φ então ψ .

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Se as primeiras duas linhas captam o significado “intuitivo” de uma frase condicional, as duas últimas podem causar estranheza:

- Qual o valor de verdade da frase “Se estiver sol vou à praia” no caso de não haver sol”?

- A opção que se toma neste caso é assumir que a frase é verdadeira, isto é, quem a profere não está a mentir (ou pelo menos não há forma de provar que o está a fazer), e portanto, tal como na justiça, “*in dubio pro reu*”.

Implicação Material - Equivalências

- Usando o método definido atrás para obtenção das DNF e CNF a partir de tabelas de verdade, podemos notar que a implicação pode ser escrita pelas expressões equivalentes:

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

Em DNF

$$\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

Em CNF

$$\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$$

- Podemos agora revisitar as tradução das frases condicionais com excepções que tínhamos deixado em aberto.

Frases Condicionais com Excepções

Exemplo: O Tareco arranha **a menos que** seja manso.

Formas "equivalentes" :

- **Se** não é manso **então** o Tareco arranha
- **Se** não arranha **então** o Tareco é manso

A	M	$\neg$ M	$\rightarrow$ A	$\neg$ A	$\rightarrow$ M
V	V	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F

As frases equivalentes captam o sentido de que se não for uma excepção (ser manso) então o Tareco arranha. Mas, sendo uma excepção, ele pode arranhar (linha 1 - V).

Formas "**não** equivalentes" :

- **Se** é manso **então** o Tareco não arranha
- **Se** arranha **então** o Tareco não é manso

A	M	M $\rightarrow$	$\neg$ A	A $\rightarrow$	$\neg$ M
V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V

- As frases não equivalentes obrigam o Tareco, no caso excepcional (ser manso), a fazer o que os gatos mansos **podem** fazer! Sendo manso não pode arranhar (linha 1 - F).

Frases Condicionais com Excepções - Implicaturas

Exemplo: O Tareco arranha a menos que seja manso.

- Este exemplo ilustra uma outra forma de implicatura. Provavelmente o que se pretende dizer é que

    - Tareco arranha a menos que seja manso ... *e nesse caso não arranha*”.

    ... o que corresponderia não a uma implicação simples $(\neg M \rightarrow A)$ mas sim a uma dupla implicação $(\neg M \rightarrow A) \wedge (M \rightarrow \neg A)$, o que corresponde a uma equivalência, representada pela tabela de verdade abaixo.

A	M	$\neg$ M	$\leftrightarrow$ A
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F

- Mas, em geral, a tradução “adequada” será através de uma das formas equivalentes

Se não for manso **então** o Tareco arranha

Se não arranha **então** o Tareco é manso

- .