Lógica Computacional

Lógica de Operadores Booleanos

Interpretações Tautológicas, Lógicas e Analíticas

Funcionalidade / Tabelas de Verdade dos Operadores Booleanos

Consequências Tautológica, Lógica e Analítica

Verdades / Falsidades / Possibilidades

Interpretação de Proposições Elementares

- Em geral, proposições elementares correspondem a uma representação de factos sobre o domínio em que se pretende aplicar a Lógica de 1ª Ordem (ou Proposicional).

- Sendo essa representação sujeita a alguma subjectividade, a verdade ou falsidade das fórmulas representando os factos deverá ser estabelecida numa “interpretação” ou “modelo” do domínio de aplicação.

- Por exemplo, a fórmula

`Alta(maria)`

correspondendo à afirmação “A Maria é alta”, não é necessariamente verdadeira ou falsa, dependendo do contexto em que é feita.

- Ora tendo a validade de argumentos (i.e. consequência lógica) sido definida como ocorrendo quando “a conclusão é verdadeira sempre que as premissas forem verdadeiras”, ela terá de ser formalizada mais rigorosamente à luz desta potencial “subjectividade”.

Interpretação de Proposições Elementares

- Consideremos a linguagem $\mathcal{L}_o$ composta por todas as fórmulas de 1ª ordem "simples" que se podem escrever com uma assinatura Σ = < SP, SF> em que SP é o conjunto de símbolos predicativos e SF os conjunto de símbolos funcionais (incluindo constantes).

- Uma **interpretação** $\mathcal{I}$ da Linguagem $\mathcal{L}_o$ ou **Valoração** $\mathcal{V}$ é uma função que atribui a cada fórmula de $\mathcal{L}_o$ o valor Verdade ou Falso. Escreveremos indistintamente

$$\mathcal{I} : \mathcal{L}_o \rightarrow \{V,F\} \quad \text{e} \quad \mathcal{V} : \mathcal{L}_o \rightarrow \{V,F\}$$

- Uma interpretação **satisfaz** uma fórmula ϕ da linguagem $\mathcal{L}_o$ sse a fórmula for verdadeira nessa interpretação.

$$\mathcal{I} \models \phi \;\Leftrightarrow\; \mathcal{I}(\phi) = V \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{V} \models \phi \;\Leftrightarrow\; \mathcal{V}(\phi) = V$$

- À partida estas definições não levantam qualquer problema já que a função de valoração é perfeitamente arbitrária

- E no entanto...

Interpretação de Proposições Elementares

Exemplo

- Consideremos a linguagem dos blocos $\mathcal{L}_{\mathcal{TW}}$ restrita aos predicados **Cube** e **Tet** e à constante **a**.
- Para esta linguagem $\mathcal{L}_{\mathcal{TW}}$ podemos considerar 4 interpretações distintas:

$$I_1 : \{ \texttt{Cube(a) = T, Tet(a) = T} \}$$

$$I_2 : \{ \texttt{Cube(a) = T, Tet(a) = F} \}$$

$$I_3 : \{ \texttt{Cube(a) = F, Tet(a) = T} \}$$

$$I_4 : \{ \texttt{Cube(a) = F, Tet(a) = F} \}$$

- Nestas condições as interpretações I_1 e I_2 satisfazem a fórmula **Cube(a)** e as interpretações I_3 e I_4 não a satisfazem.

$I_1 \models$ `Cube(a)` mas $I_3 \not\models$ `Cube(a)`

- Mas a interpretação I_1 é um pouco “estranha”, já que indica que o objecto **a** é simultaneamente um cubo e um tetraedro.

Interpretação de Proposições Elementares

Exemplo

- Consideremos a linguagem dos blocos $\mathcal{L}_{\mathcal{TW}}$ restrita às constantes **a** e **b**, e aos predicados **Cube**, **Tet** e =.
- Para esta linguagem $\mathcal{L}_{\mathcal{TW}}$ podemos considerar uma interpretação:

$$\mathcal{I} : \{ \texttt{Cube(a) = T, Tet(b) = T, a = b} \}$$

- Tal como anteriormente esta interpretação $\mathcal{I}$ é igualmente "estranha", mas por outras razões.

- Dado o nosso conhecimento do mundo dos blocos, nada impede que um bloco **a** seja um cubo e um bloco **b** seja um tetraedro. No entanto tal não pode suceder se ambos forem o mesmo bloco!

- Os exemplos anteriores mostram que nas nossas inferências e raciocínios usamos algum conhecimento adicional, nomeadamente ao limitar as interpretações que fazemos às que nos parecem fazer sentido no contexto em que estamos inseridos.

Operadores Composicionais

- Até agora temos estado a considerar apenas fórmulas elementares com um único predicado. Mas qualquer linguagem minimamente expressiva inclui operadores lógicos, pelo que poderemos analisar as definições anteriores para fórmulas de 1ª ordem (FPOs) que incluam estes operadores.

- Em particular, o operador de negação é um operador “funcional”. Sabendo o valor de verdade da fórmula ϕ, o valor de verdade da negação dessa fórmula é sempre o oposto, como se pode representar através da seguinte tabela de verdade.

ϕ	$\neg\phi$
V	**F**
F	**V**

- Assim sendo, nunca poderemos ter $\mathcal{I}$ **= { Tet(a), ... } |= $\neg$ Tet(a)** pois qualquer interpretação que satisfaça **Tet(a)** (e os outros predicados de $\mathcal{I}$) nunca poderá satisfazer a fórmula $\neg$**Tet(a)**.

- Será que todos os operadores que introduzimos nas nossas **FOPs**, provenientes da linguagem natural gozam da funcionalidade do operador de negação?

Interpretação de Proposições Elementares

Exemplos

1. A Maria foi para casa e tem fome.
2. A Maria foi para casa porque tinha fome.

- Em geral, se um operador for funcional o valor de verdade das componentes determina o valor de verdade da frase composta.

- No primeiro caso a frase é verdadeira se e apenas se ambas as componentes forem verdadeiras – É verdade que "**A Maria foi para casa e tem fome**" se e apenas se for verdade que "**A Maria foi para casa**" e que "**A Maria tem fome**". Desta forma poderemos considerar que o operador de conjunção "**e**" é um operador funcional.

- No entanto no segundo caso as coisas são mais complicadas. Mesmo quando seja verdade que "**A Maria foi para casa**" e que " **A Maria tem fome**", será que podemos avaliar se "**A Maria foi para casa *porque* tem fome**"?

- Como o valor de verdade da frase composta pode ser Verdade ou Falso, o operador de "justificação" (***porque***) não é um operador funcional !

Interpretação de Proposições Elementares

- Assim, apenas consideraremos nas linguagens de 1ª ordem operadores funcionais, como são os operadores de negação, conjunção e disjunção, com as tabelas de verdade abaixo.

Negação ($\neg$)

ϕ	$\neg\phi$
V	**F**
F	**V**

Conjunção ($\wedge$)

ϕ	Φ	$\phi \wedge \varphi$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Disjunção ($\vee$)

ϕ	Φ	$\phi \vee \varphi$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Interpretações Tautológica e Lógica

- Podemos agora utilizar uma definição mais formal e precisa das interpretações que utilizaremos.

Interpretação

Uma **interpretação** $\mathcal{I}$ da Linguagem $\mathcal{L}$ (ou **valoração** $\mathcal{V}$ é uma função que atribui a cada fórmula básica de $\mathcal{L}$ o valor Verdade ou Falso.

Numa interpretação $\mathcal{I}$, o valor de verdade das fórmulas $\neg\phi$, $\phi\wedge\varphi$ e $\phi\vee\varphi$, é determinado pela aplicação dos operadores funcionais $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ aos valores de verdade das fórmulas ϕ e φ nessa interpretação $\mathcal{I}$.

Interpretação Lógica

Uma interpretação **lógica** $\mathcal{I}_{\mathcal{FO}}$ da linguagem $\mathcal{L}$ é uma interpretação que adicionalmente satisfaz as propriedades do predicado de igualdade.

i. Uma fórmula $\phi = \phi$ pertence a qualquer interpretação lógica $\mathcal{I}_{\mathcal{FO}}$.

ii. As fórmulas ϕ e φ deverão ter o mesmo valor de verdade numa interpretação lógica $\mathcal{I}$, se uma se puder reduzir à outra através de substituição dos seus argumentos induzida pelos predicados de igualdade dessa interpretação $\mathcal{I}_{\mathcal{FO}}$.

Interpretação Analítica

- Podemos ainda utilizar interpretações mais restritivas.

Interpretação Analítica

Uma interpretação $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ num domínio de aplicação $\mathcal{D}$ é uma interpretação analítica (ou analógica) se é uma interpretação lógica que adicionalmente satisfaz as restrições assumidas do domínio $\mathcal{D}$ que se pretende representar.

- Esta definição é pouco formal, já que não definimos rigorosamente quais as "restrições do domínio $\mathcal{D}$", que dependem naturalmente desse domínio. Podemos precisá-la um pouco mais para um domínio concreto.

Interpretação TW

Uma interpretação $\mathcal{I}_{\mathcal{TW}}$ *(Tarski World)* é uma interpretação lógica que adicionalmente satisfaz as restrições assumidas no mundo dos blocos.

- Informalmente essas restrições impedem que um bloco tenha duas formas ou tamanhos distintos, que um bloco esteja em duas posições distintas ou que blocos distintos ocupem a mesma posição, ou que satisfaçam predicados relacionados.
- Formalizaremos estas restrições mais tarde. Por ora ilustraremos as definições com alguns exemplos.

Interpretações Tautológicas, Lógicas e Analíticas

Exemplos

I_1: **`Cube(a) = V, Cube(b) = V`**

é uma interpretação que é Lógica e de Tarski.

I_2: **`Cube(a) = V, Cube(b) = F, (a = b) = V`**

é uma interpretação possível, pois não se entrando em conta com as propriedades da igualdade, nada impede que o bloco **a** seja um cubo mas o **b** não o seja. Não é no entanto uma interpretação lógica, pois sendo **a** e **b** o mesmo objecto, eles têm de ter as mesmas propriedades. Obviamente não é igualmente uma interpretação de Tarski (por não ser uma interpretação lógica).

I_3: **`Cube(a) = V, Tet(a) = V`**

é uma interpretação que é lógica mas não de Tarski (um bloco não pode ter duas formas!)

I_4: **`Cube(a) = V, Tet(b) = V, (a = b) = V`**

é igualmente uma interpretação lógica, pois nada impede um objecto (com dois nomes) de ter duas "propriedades". Mas não é uma interpretação de Tarski, que não permite que um objecto tenha duas formas (as "propriedades") distintas.

Consequências Tautológicas, Lógicas e Analíticas

- Com a formalização do conceito de interpretação poderemos formalizar as noções de consequência tautológica, lógica e analítica, qualificando as definições anteriores.

$|=_{TT}$ Validade / Consequência Tautológica

Um argumento é **válido** **tautologicamente** se a conclusão é verdadeira em todas as **interpretações** que satisfaçam as premissas. Neste caso diz-se que a conclusão é uma **consequência tautológica** das premissas.

$|=_{FO}$ Validade Lógica / Consequência Lógica

Um argumento é **válido** **logicamente** se a conclusão é verdadeira em todas as **interpretações lógicas** que satisfaçam as premissas. Neste caso diz-se que a conclusão é uma **consequência lógica** das premissas.

$|=_{TW}$ Validade Analítica / Consequência Analítica

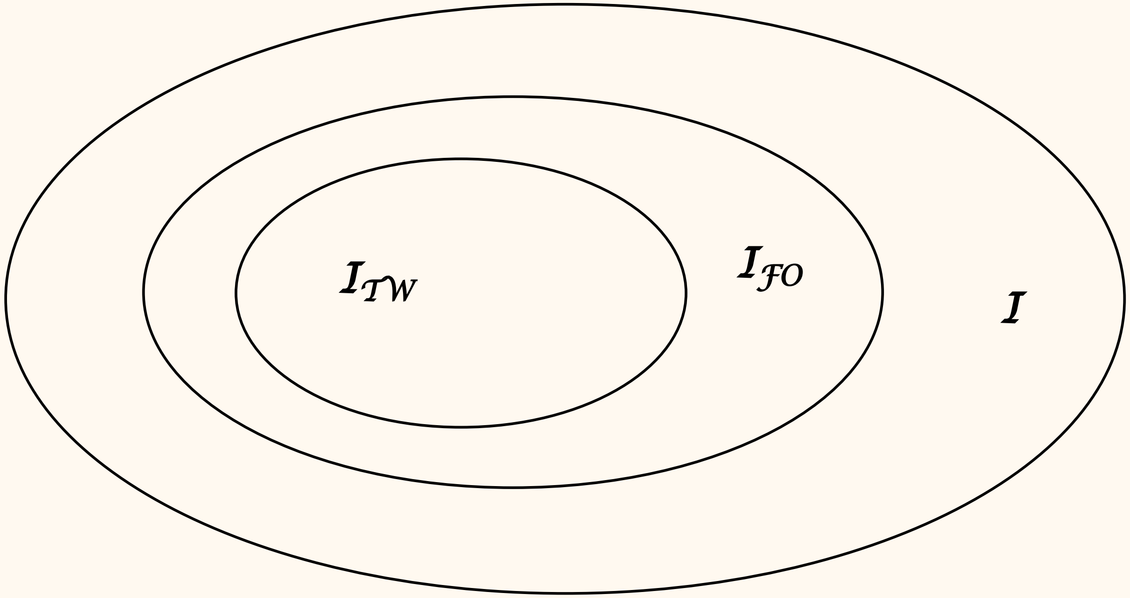
Um argumento é **válido** **analiticamente** se a conclusão é verdadeira em todas as **interpretações analíticas** que satisfaçam as premissas. Neste caso diz-se que a conclusão é uma **consequência analítica** das premissas.

Nota: Por omissão, assumiremos que o domínio é o mundo dos blocos.

Consequências Tautológicas, Lógicas e Analíticas

- Pela sua definição podemos constatar que existe uma relação de inclusão entre o conjunto das interpretações genéricas, lógicas e analiticas, dadas as restrições adicionais que se foram colocando nessas definições.

Nota: Iremos geralmente usar $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{FO}}$ e $\mathcal{I}_{\mathcal{TW}}$ para denotar respectivamente interpretações genéricas, lógicas e de Tarski.



Consequências Tautológicas, Lógicas e Analíticas

Exemplos

A1. $\{\mathtt{Cube(a)},\ \mathtt{Tet(b)}\} \models_{TT}\ \mathtt{Cube(a)} \wedge \mathtt{Tet(b)}$

Se as premissas são verdadeiras então a conclusão, que deriva da aplicação do operador Booleano $\wedge$ às duas premissas, também é verdadeira. Mais formalmente

$$\forall \mathcal{I}:\ \mathcal{I} \models \{\mathtt{Cube(a)},\ \mathtt{Tet(b)}\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models_{TT} \mathtt{Cube(a)} \wedge \mathtt{Tet(b)}$$

A2. $\{\mathtt{Cube(a)},\ \mathtt{a=b}\} \models_{FO}\ \mathtt{Cube(b)}$

Se as premissas são verdadeiras então a conclusão deriva da aplicação das propriedades da premissa de igualdade na outra premissa. Assim a conclusão é consequência lógica (e analítica), mas não tautológica.

$$\forall \mathcal{I}_{\mathcal{FO}}:\ \mathcal{I}_{\mathcal{FO}} \models \{\mathtt{Cube(a)},\ \mathtt{a=b}\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}_{\mathcal{FO}} \models_{FO} \mathtt{Cube(b)} \qquad \checkmark$$

$$\forall \mathcal{I}:\ \mathcal{I} \models \{\mathtt{Cube(a)},\ \mathtt{a=b}\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models_{TT} \mathtt{Cube(b)} \qquad ?$$

Se não considerarmos a premissa de igualdade ou, equivalentemente, se renomearmos os predicados para nomes de que não conheçamos o significado, nada poderemos concluir. É sempre possível existir um objecto **a** com a propriedade **C** e que está numa relação **Eq** com outro objecto **b**, sem que este tenha a propriedade **C**.

$$\mathcal{I} \models \{\mathtt{C(a)},\ \mathtt{Eq(a,b)}\} \ \Rightarrow\ \mathcal{I} \models \mathtt{C(b)} \quad ???$$

Consequências Tautológicas, Lógicas e Analíticas

Exemplos

A3. `{Cube(a), a=b}` $|=_{TW}$ $\neg$`Tet(b)`

Sendo as premissas verdadeiras só se pode estabelecer a conclusão através de restrições do mundo dos blocos: Um bloco, pode ter dois nomes, mas não duas formas distintas.

$$\forall \mathcal{I}_{\mathcal{TW}}\!: \;\; \mathcal{I}_{\mathcal{TW}} \models \{\texttt{Cube(a), a=b}\} \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{I}_{\mathcal{TW}} \models \neg\texttt{Tet(b)} \;\; \checkmark$$

$$\neg\, \forall \mathcal{I}_{\mathcal{TW}}\!: \;\; \mathcal{I}_{\mathcal{FO}} \models \{\texttt{Cube(a), a=b}\} \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{I}_{\mathcal{FO}} \models \neg\texttt{Tet(b)} \;\; ?$$

Mesmo considerando as propriedades da premissa de igualdade, a conclusão só se estabelece pelo conhecimento que um cubo não pode ser um tetraedro. É sempre possível existir um objecto com nomes a e b, com a propriedade **C** e que goza da propriedade **T**.

$$\mathcal{I}_{\mathcal{FO}} \models \{\texttt{C(a), a=b}\} \;\Rightarrow\; \mathcal{I}_{\mathcal{FO}} \models \neg\texttt{T(b)} \qquad ?$$

No entanto se **C** e **T** representam formas distintas no mundo dos blocos, se um bloco tiver a forma **C** claramente não poderá ter a forma **T**.

Obviamente se a conclusão não é consequência lógica, menos será uma consequência tautológica.

Consequência Tautológica ?

- Os exemplos anteriores permitem-nos determinar se uma fórmula é uma consequência tautológica das premissas. Para isso basta aplicar as funções booleanas às fórmulas elementares que constituem as premissas e a conclusão e eliminar as linhas em que as as premissas não são todas verdadeiras. Nas restantes a conclusão deverá ser verdadeira!

Exemplo:

$$\{\mathtt{Tet(a)} \vee \mathtt{Tet(b)}, \neg\mathtt{Tet(a)}\} \models_{TT} \mathtt{Tet(b)} \vee \neg\, \mathtt{Cube(a)}$$

Tet(a)	Tet(b)	Cube(a)	Tet(a)∨Tet(b)	¬Tet(a)	Tet(b)∨	¬Cube(a)
~~V~~	~~V~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~
~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~V~~
~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~
~~V~~	~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~V~~
F	V	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	V	V
~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~F~~
~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~V~~	~~V~~

Consequência Tautológica ?

- Na realidade, para determinar se uma fórmula é uma consequência tautológica das premissas, deveremos considerar todas as combinações de valores de verdade das várias fórmulas elementares.
- Assim sendo o seu “significado pode ser ignorado e as fórmulas elementares substituídas por símbolos predicativos sem argumentos.
- **Exemplo**: $\{\mathtt{Tet(a)} \vee \mathtt{Tet(b)}, \neg\mathtt{Tet(a)}\} \models_{TT} \mathtt{Tet(b)} \vee \neg \mathtt{Cube(a)}$

  $\{ A \vee B, \neg A \} \models_{TT} B \vee \neg C$

  com $A \equiv \mathtt{Tet(a)}$ $B \equiv \mathtt{Tet(b)}$ e $C \equiv \mathtt{Cube(a)}$

A	B	C	A ∨ B	¬ A	B ∨	¬ C
V	V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

Consequência Lógica ?

- O “algoritmo” anterior poderá ser adaptado para determinar se uma fórmula é uma consequência lógica.
- Para isso bastaria (?) eliminar adicionalmente as linhas que não correspondem a uma interpretação lógica (i.e. não satisfazem as propriedades da igualdade) !

Exemplo:

`{Tet(a), a = b}` $|=_{FO}$ `Tet(b)`

Tet(a)	Tet(b)	a=b	Tet(a)	a=b	Tet(b)	
V	V	V	V	V	V	
~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	
~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~	?
~~V~~	~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~F~~	
~~F~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~V~~	
~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~V~~	
~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	
~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	

Consequência Analítica?

- O “algoritmo” anterior poderá ainda ser adaptado para determinar se uma fórmula é uma consequência analítica.
- Para isso bastaria (?) eliminar adicionalmente as linhas que não correspondem a uma interpretação analítica (i.e. não satisfazem as propriedades dos mundos dos blocos) !

Exemplo:

$$\{\mathtt{Tet(a)} \vee \mathtt{Tet(b)}, \neg\mathtt{Tet(a)}\} \models_{TW} \neg\mathtt{Cube(b)}$$

Tet(a)	Tet(b)	Cube(b)	Tet(a)∨Tet(b)	¬Tet(a)	¬Cube(b)	
~~V~~	~~V~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~F~~	
~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	
~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~	~~F~~	
~~V~~	~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	
~~F~~	~~V~~	~~V~~	~~V~~	~~V~~	~~F~~	?
F	V	F	V	V	V	
~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	~~V~~	~~F~~	
~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~V~~	~~V~~	

Complexidade

Apesar de permitirem determinar, em casos simples, se uma fórmula é uma conclusão (tautológica, lógica ou analiticamente) válida de um conjunto de premissas, a aplicação dos algoritmos em geral levanta problemas vários.

No caso de consequências **tautológicas**, coloca-se uma questão de **complexidade**. Havendo **k** fórmulas elementares, teremos em geral de analisar $\mathbf{2^k}$ combinações de valores de verdade, o que torna o método "intratável".

k	1	2	5	10	20	30	40	50	60
$\mathbf{k^2}$	1	4	25	100	400	900	1600	2500	3600
$\mathbf{2^k}$	2	4	32	1024	1.049E+06	1.074E+09	1.100E+12	1.126E+15	1.153E+18
				1 ms	1 seg	20 min	13 dias	36 anos	36 mil anos

Este é um dos problemas clássicos do estudo da complexidade em computação. Informalmente este problema pertence à classe dos problemas NP-completos, cuja solução requer um número **exponencial** de passos para a sua resolução.

Para a derivação de consequências lógica e analítica, o algoritmo seira ainda mais complexo, pois haveria que analisar quais as linhas a eliminar.

Assim, estudaremos adiante como determinar a validade das consequências lógicas (e tautológicas) através de **demonstrações num sistema formal**.