Lógica Computacional

- O sistema $\mathcal{R}$ para a Lógica de Predicados
- Refutações no sistema $\mathcal{R}$
- Composição de Substituições
- Análise da Contradição: Respostas a Questões

Resolução na Lógica de Predicados

- Uma vez definidas as extensões necessárias em relação ao caso proposicional, podemos agora apresentar a extensão do sistema $\mathcal{R}_p$ para a Lógica de Predicados.

Sistema de Resolução $\mathcal{R}$

O Sistema de Resolução $\mathcal{R}$ tem as seguintes características:

1. Demonstrações através de ***Refutações***: Para demonstrar uma fórmula φ a partir de um conjunto de premissas Φ, demonstra-se que o conjunto $\Phi \cup \{\varphi\}$ é insatisfazível. Isto é, que a partir de $\Phi \cup \{\varphi\}$ pode demonstrar-se o absurdo / ***cláusula vazia***.
2. Todas as fórmulas utilizadas são cláusulas, ou seja disjunções obtidas a partir da forma CNF das matrizes de fórmulas ***Prenex Skolemizadas***.
3. A única regra de inferência utilizada é a resolução, requerendo esta que os literais resolvidos sejam ***unificados***.

Resolução na Lógica de Predicados

Exemplo 1: Se todos os dodecaedros são grandes e estão à frente do objecto a, e se existe um objecto que não está à frente de nenhum objecto, então existe um objecto que não é um dodecaedro.

$$
\begin{array}{l|l}
\textbf{F1} & \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{Dodec(x)} \rightarrow (\mathbf{Large(x)} \wedge \mathbf{FrontOf(x,\ a)})) \\
\textbf{F2} & \exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \neg \mathbf{FrontOf(x,y)} \\
\hline
\textbf{F3} & \exists \mathbf{x}\ \neg\ \mathbf{Dodec(x)}
\end{array}
\quad \mathcal{R}
$$

- Para demonstrar este argumento no sistema $\mathcal{R}$ há que transformar as premissas e a negação da conclusão para a forma clausal. A fórmula **F1** requer os seguintes passos de transformação, originando as cláusulas **C1** e **C2.**

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{F1.} & \forall x\ (\mathrm{Dodec}(x) \rightarrow (\mathrm{Large}(x) \wedge \mathrm{FrontOf}(x,a))) \\
\Rightarrow & \forall x\ (\neg\ \mathrm{Dodec}(x) \vee (\mathrm{Large}(x) \wedge \mathrm{FrontOf}(x,a))) \\
\Rightarrow & \forall x\ ((\neg\ \mathrm{Dodec}(x) \vee \mathrm{Large}(x)) \wedge (\neg\ \mathrm{Dodec}(x) \vee \mathrm{FrontOf}(x,a))) \\
\Rightarrow & \forall x1\ ((\neg\ \mathrm{Dodec}(x1) \vee \mathrm{Large}(x1)) \wedge \\
 & \forall x2\ (\neg\ \mathrm{Dodec}(x2) \vee \mathrm{FrontOf}(x2,a))) \\
\Rightarrow & \textbf{C1.}\ \neg\ \mathrm{Dodec}(x1) \vee \mathrm{Large}(x1) \\
 & \textbf{C2.}\ \neg\ \mathrm{Dodec}(x2) \vee \mathrm{FrontOf}(x2,a)
\end{array}
$$

Resolução na Lógica de Predicados

Exemplo 1 (cont):

$$\begin{array}{l|l} \textbf{F1} & \forall x \; (\mathrm{Dodec}(x) \rightarrow (\mathrm{Large}(x) \wedge \mathrm{FrontOf}(x,\; a))) \\ \textbf{F2} & \exists x \; \forall y \; \neg \mathrm{FrontOf}(x,y) \\ \hline \textbf{F3} & \exists x \; \neg \; \mathrm{Dodec}(x) \end{array} \; \mathcal{R}$$

- A fórmula **F2** apenas requer a skolemização da variável **x**, devendo a constante de Skolem ser diferente da constante **a** já referida na fórmula **F1**.

$\textbf{F2.} \; \exists x \; \forall y \; \neg \mathrm{FrontOf}(x,y)$

$\Rightarrow$ $\textbf{C3.} \; \neg \; \mathrm{FrontOf}(c,x3)$

- Finalmente a negação da conclusão substitui o quantificador existencial e evita a skolemização.

$\textbf{F3.} \; \neg \; \exists x \; \neg \; \mathrm{Dodec}(x)$

$\Rightarrow$ $\forall x \; \neg \; \neg \; \mathrm{Dodec}(x)$

$\Rightarrow$ $\textbf{C4.} \; \mathrm{Dodec}(x4)$

Resolução na Lógica de Predicados

Exemplo 1 (cont):

$$
\begin{array}{l|l}
\textbf{F1} & \forall x\ (\mathrm{Dodec}(x) \rightarrow (\mathrm{Large}(x) \wedge \mathrm{FrontOf}(x,\ a))) \\
\textbf{F2} & \exists x\ \forall y\ \neg \mathrm{FrontOf}(x,y)) \\
\hline
\textbf{F3} & \exists x\ \neg\ \mathrm{Dodec}(x)
\end{array}
\ \mathcal{R}
$$

- Uma vez obtida a forma clausal, pode passar-se à demonstração por refutação.

$$
\begin{array}{l|lll}
\mathrm{C1.} & \neg\ \mathrm{Dodec}(x1) \vee \mathrm{Large}(x1) & & \\
\mathrm{C2.} & \neg\ \mathrm{Dodec}(x2) \vee \mathrm{FrontOf}(x2,a) & & \\
\mathrm{C3.} & \neg\ \mathrm{FrontOf}(c,x3) & & \\
\mathrm{C4.} & \mathrm{Dodec}(x4) & & \\
\hline
\mathrm{C5.} & \mathrm{FrontOf}(x4,a) & \mathrm{Res}\ 4,2 & \{x2/x4\} \\
\mathrm{C6.} & \square & \mathrm{Res}\ 5,3 & \{x4/c,\ x3/a\}
\end{array}
$$

- No final pode concluir-se a existência de um não-dodecaedro (**x4**). De facto, se todos os objectos **x4** fossem dodecaedros, o sistema de cláusulas **C1-C4** seria inconsistente. Especificamente, é possível instanciar **x4** a um dodecaedro para obter a inconsistência, pelo que se conclui que essa instância de **x4** não é um dodecaedro.
- Pelas substituições (**x4/c**), verifica-se que o **não-dodecaedro** é o objecto referido na fórmula **F2**, sem nenhum objecto à sua frente, e que skolemizamos com o nome **c**.

Resolução na Lógica de Predicados

Exemplo 1 (cont):

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{F1} & \forall x\ (Dodec(x) \rightarrow (Large(x) \wedge FrontOf(x,\ a))) \\ \mathbf{F2} & \exists x\ \forall y\ \neg FrontOf(y,x) \\ \hline \mathbf{F3} & \exists x\ \neg\ Dodec(x) \end{array}\ \mathcal{R}$$

- Mas a unificação das cláusulas C2 e C4 pode ser feita com uma variante

$$\begin{array}{l|ll} \mathbf{C1.} & \neg\ Dodec(x1) \vee Large(x1) & \\ \mathbf{C2.} & \neg\ Dodec(x2) \vee FrontOf(x2,a) & \\ \mathbf{C3.} & \neg\ FrontOf(c,x3) & \\ \mathbf{C4.} & Dodec(x4) & \\ \hline \mathbf{C5.} & FrontOf(x2,a) & Res\ 4,2\ \{x4/x2\} \\ \mathbf{C6.} & \square & Res\ 5,3\ \{x2/c,\ x3/a\} \end{array}$$

- Neste caso, a análise da demonstração mostra que a variável **x4** (o não-dodecaedro) foi inicialmente substituida por **x2** e esta subsequentemente substituída por **c**.
- Assim coloca-se a necessidade de definir a operação de **composição** de substituições, de forma a “seguir o rasto” das variáveis que vão sendo substituídas ao longo da derivação da cláusula vazia.

Composição de Substituições

- Informalmente, a composição de duas substituições **σ** e **ρ** garante que um termo a que sejam aplicadas essas substituições em sequência (**σ** seguida de **ρ**) fica idêntico ao que ficaria se lhe fosse aplicada directamente a sua composição. Mais formalmente,

Composição de Substituições:

Dadas duas substituições $\sigma = \{ \nu_1/\tau_1 \ldots , \nu_m/\tau_m \}$ e $\rho = \{ \omega_1/\theta_1 \ldots , \omega_n/\theta_n \}$ a sua composição, denotada por $\sigma \circ \rho$, é obtida substituindo em **σ** todas as ocorrências de qualquer ω_ι pelo respectivo par θ_ι, e unindo o conjunto resultante com ρ.

Exemplo: Para σ = { **x1/a, x2/y1, x3/f(y2)**} e ρ = { **y1/b, y2/y3** } temos

σ ∘ ρ = { **x1/a, x2/y1, x3/f(y2)**} ∘ { **y1/b, y2/y3** }
= { **x1/a, x2/b, x3/f(y3)**} ∪ { **y1/b, y2/y3** }
= { **x1/a, x2/b, x3/f(y3), y1/b, y2/y3** }

- Aplicando as substituições σ e ρ em sequência ao termo **T: P(x1,x2,x3,y1,y2,y3)**

P(x1,x2,x3,y1,y2,y3)σ = **P(a,y1,f(y2),y1,y2,y3)** e
P(a,y1,f(y2),y1,y2,y3) ρ = **P(a,b,f(y3),b,y3,y3)**

claramente o resultado de aplicar directamente a substituição **σ ∘ ρ** ao termo **T**.

Composição de Substituições

Exemplo 1 (cont):

```
C1. ¬ Dodec(x1) ∨ Large(x1)
C2. ¬ Dodec(x2) ∨ FrontOf(x2,a)
C3. ¬ FrontOf(c,x3)
C4. Dodec(x4)
```

- Regressando ao exemplo inicial verifica-se que em ambos os casos, a composição das duas substituições feitas conduz ao mesmo resultado – o objecto **c** não pode ser um dodecaedro, contrariamente ao admitido na negação da conclusão. No primeiro caso,

```
C5. FrontOf(x4,a)    Res 4,2 {x2/x4}
C6. □                Res 5,3 {x4/c, x3/a}
```

por composição das substituições obtém-se

$$\{x2/x4\} \circ \{x4/c,\ x3/a\} = \{x2/c\} \cup \{x4/c,\ x3/a\} = \{x2/c,\ x3/a,\ x4/c\}$$

- No segundo caso,

```
C5. FrontOf(x2,a)    Res 4,2 {x4/x2}
C6. □                Res 5,3 {x2/c, x3/a}
```

obtemos

$$\{x4/x2\} \circ \{x2/c,\ x3/a\} = \{x4/c\} \cup \{x2/c,\ x3/a\} = \{x2/c,\ x3/a,\ x4/c\}$$

Factorização de Cláusulas

- Antes de apresentar outros exemplos existe ainda uma situação que precisa de ser analisada.
- Até agora as substituições eram usadas para permitir unificar literais complementares de **duas** cláusulas que seriam resolvidas após aplicação de um unificador mais geral.
- O próximo exemplo mostra que (raramente) pode ser necessário aplicar resolução **numa só** cláusula.
- Mais especificamente, isto pode ser necessário para **factorizar** ocorrências distintas, mas unificáveis, de um literal na mesma cláusula.

Exemplo 2: Paradoxo do Barbeiro

Este problema pode ser ilustrado com o "Paradoxo do Barbeiro":

> Numa aldeia existe um barbeiro que barbeia todas as pessoas que não se barbeiam a si próprios, e apenas essas pessoas.

em que se pretende provar, por contradição, que não existe tal barbeiro, isto é pretende demonstrar-se que se pode obter a contradição a partir da (negação da) fórmula

$$\{\} \models \neg \exists x\ (B(x) \wedge \forall y\ (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$$

Factorização de Cláusulas

Exemplo 2 (cont): Passando a fórmula para a forma clausal obtemos as cláusulas

$$\text{F1. } \exists x\ \forall y\ (B(x) \land (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$$
$$\rightarrow\ \exists x\ \forall y\ (B(x) \land (B(y,y) \lor B(x,y)) \land (\neg B(y,y) \lor \neg B(x,y))$$
$$\rightarrow\ \forall y\ (B(b) \land (B(y,y) \lor B(b,y)) \land (\neg B(y,y) \lor \neg B(b,y))$$
$$\rightarrow\ B(b) \land \forall y\ (B(y,y) \lor B(b,y)) \land \forall y\ (\neg B(y,y) \lor \neg B(b,y))$$
$$\rightarrow\ \text{C1. } B(b)$$
$$\text{C2. } B(y1,y1) \lor B(b,y1)$$
$$\text{C3. } \neg B(y2,y2) \lor \neg B(b,y2))$$

- Mas agora somos confrontados com um problema. Para resolver as cláusulas C2 e C3. eliminamos um literal positivo de C1 e um negativo de C2 e obtemos uma cláusula com um literal positivo e outro negativo, que sendo uma tautologia não nos pode conduzir à cláusula vazia. O exemplo abaixo mostra as 4 possíveis resolventes de C2 e C3

C2.	$B(y1,y1)$	$\lor\ B(b,y1)$	
C3.	$\neg B(y2,y2)$	$\lor\ \neg B(b,y2)$	
C4a.	$B(b,y2)$	$\lor\ \neg B(b,y2)$	Res 2(1), 3(1) {y1/y2}
C4b.	$B(b,b)$	$\lor\ \neg B(b,b)$	Res 2(1), 3(2) {y1/b, y2/b}
C4c.	$B(b,b)$	$\lor\ \neg B(b,b)$	Res 2(2), 3(1) {y1/b, y2/b}
C4d.	$B(b,y2)$	$\lor\ \neg B(b,y2)$	Res 2(2), 3(2) {y1/y2}

Factorização de Cláusulas

Exemplo 2 (cont):

- Para ultrapassar este problema deveremos **factorizar** os literais das cláusulas, isto é aplicar-lhes um unificador mais geral e usar idempotência para eliminar um dos literais repetidos.

- O Paradoxo do Barbeiro pode ser resolvidos como ilustrado de seguida, já que negando a conclusão se obtém a cláusula vazia obtida trivialmente, uma vez factorizadas as cláusulas C2 e c3.

$$\{\} \mid\!-_{\mathcal{R}} \neg\exists x\ \forall y\ (B(x) \wedge (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$$

C1.	B(b)	
C2.	B(y1,y1) ∨ B(b,y1)	
C3.	¬B(y2,y2) ∨ ¬B(b,y2))	
C4.	B(b,b)	Fact 2 {y1/b}
C5.	¬B(b,b)	Fact 3 {y2/b}
C6.	□	Res 4, 5

- Uma vez abordadas as componentes do sistema $\mathcal{R}$, podemos ilustrar o seu funcionamento num conjunto de demonstrações já utilizadas para o sistema $\mathcal{DN}$.

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 3: $\{\ \exists x\ \forall y\ \mathrm{NearOf}(x,y)\ \} \vdash_{\mathcal{R}} \forall y\ \exists x\ \mathrm{NearOf}(x,y)$

- Existindo um objecto "perto" de todos os objectos, então todos os objectos têm algum objecto perto deles.

F1. $\exists x\ \forall y\ \mathrm{NearOf}(x,y)$

➔ C1. $\mathrm{NearOf}\ (a,y1)$

F2. $\neg\forall y\ \exists x\ \mathrm{NearOf}\ (x,y)$

➔ $\exists y\ \forall x\ \neg\ \mathrm{NearOf}\ (x2,y2)$

➔ C2. $\neg\ \mathrm{NearOf}\ (x2,b)$

- A demonstração exige um único passo de resolução:

C1.	NearOf (a,y1)	
C2.	¬ NearOf (x2,b)	
C3.	□	Res 1, 2 {y1/b, x2/a}

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 4: $\{\forall y\ \exists x\ \mathrm{NearOf}(x,y)\} \mid\!-_{\mathcal{R}} \exists x\ \forall y\ \mathrm{NearOf}(x,y)$

- Já a inversa não é verdadeira. Se todos os objectos estão perto de algum objecto, não existe necessariamente um objecto "perto" de todos os objectos.

F1. $\forall y\ \exists x\ \mathrm{NearOf}(x,y)$

➔ C1. $\mathrm{NearOf}(f(y1),\ y1)$

F2. $\neg\ \exists x\ \forall y\ \mathrm{NearOf}\ (x,y)$

➔ $\forall x\ \exists y\ \neg\ \mathrm{NearOf}\ (x,y)$

➔ C2. $\neg \mathrm{NearOf}(x2,\ g(x2))$

- Mas agora com a Skolemização das fórmulas, a pseudo-demonstração exigiria que uma variável fosse substituída por um termo contendo essa variável, o que não é permitido numa substituição!

C1.	$\mathrm{NearOf}(f(y1),y1)$
C2.	$\neg \mathrm{NearOf}(x2,g(x2))$
C3a.	$\square$ $\{\ x2\ /\ f(g(x2))\}$???
C3b.	$\square$ $\{\ y1\ /\ g(f(y1))\}$???

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 5:

Sabendo que os dodecaedros estão todos à esquerda do objecto **a** e que os tetraedros estão todos à direira de **a**, então todos os objectos na mesma coluna que **a** são cubos.

- Como vimos anteriormente, a conclusão **C** apenas se torna uma consequência lógica das premissas, se elas incluirem não só as fórmulas **F1** e **F2**, como alguns axiomas de Tarski, nomeadamente **A1, A2** e **A3**.

$$
\begin{array}{l|l}
\textbf{F1.} & \forall x\ (\mathrm{Dodec}(x) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x,\ a)) \\
\textbf{F2.} & \forall x\ (\mathrm{Tet}(x) \rightarrow \mathrm{RightOf}(x,a)) \\
\textbf{A1.} & \forall x\ (\mathrm{Tet}(x) \lor \mathrm{Cube}(x) \lor \mathrm{Dodec}(x)) \\
\textbf{A2.} & \forall x \forall y\ \neg\ (\mathrm{SameCol}(x,y) \land \mathrm{LeftOf}(x,y)) \\
\textbf{A3.} & \forall x \forall y\ \neg\ (\mathrm{SameCol}(x,y) \land \mathrm{RightOf}(x,y)) \\
\hline
\textbf{C} & \forall x\ (\mathrm{SameCol}(x,\ a) \rightarrow \mathrm{Cube}(x))
\end{array}
\ \mathcal{R}
$$

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 5 (cont)**:**

- Para demonstrar a conclusão, há que passar para a forma clausal quer as premissas quer a negação da conclusão.

```
F1. ∀x (Dodec(x) → LeftOf(x,a))
 ➔ C1. ¬ Dodec(x1) ∨ LeftOf(x1, a)
F2. ∀x (Tet(x) → RightOf(x,a))
 ➔ C2. ¬ Tet(x2) ∨ RightOf(x2, a)
A1. ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
 ➔ C3. Tet(x3) ∨ Cube(x3) ∨ Dodec(x3)
A2. ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ LeftOf(x,y))
 ➔ C4. ¬ SameCol(x4,y4) ∨ ¬ LeftOf(x4,y4)
A3. ∀x∀y ¬ (SameCol(x,y) ∧ RightOf(x,y))
 ➔ C5. ¬ SameCol(x5,y5) ∨ ¬ Right(x5,y5)
¬C. ¬∀x (SameCol(x, a) → Cube(x))
 ➔     ∃x ¬ (¬SameCol(x, a) ∨ Cube(x))
 ➔     ∃x (SameCol(x, a) ∧ ¬ Cube(x))
 ➔     SameCol(c, a) ∧ ¬ Cube(c)
 ➔ C6. SameCol(c, a)
   C7. ¬ Cube(c)
```

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 5 (cont):

- Uma vez obtidas as cláusulas pode obter-se a cláusula vazia, por exemplo com a seguinte resolução linear.

C1.	¬Dodec(x1) ∨ LeftOf(x1, a)			
C2.	¬Tet(x2) ∨ RightOf(x2, a)			
C3.	Tet(x3) ∨ Cube(x3) ∨ Dodec(x3)			
C4.	¬SameCol(x4,y4)) ∨ ¬LeftOf(x4,y4)			
C5.	¬SameCol(x5,y5) ∨ ¬RightOf(x5,y5)			
C6.	SameCol(c, a)			
C7.	¬ Cube(c)			
C8.	Tet(c) ∨ Dodec(c)	Res	7,3	{x3/c}
C9.	RightOf(c,a) ∨ Dodec(c)	Res	8,2	{x2/c}
C10.	¬SameCol(c,a) ∨ Dodec(c)	Res	9,5	{x5/c, y5/a}
C11.	Dodec(c)	Res	10,6	{ }
C12.	LeftOf(c, a)	Res	11,1	{x1/c}
C13.	¬SameCol(c, a)	Res	12,4	{ }
C14.	□	Res	13,6	{ }

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 6:

Sabendo que:

a) Qualquer objecto ao lado de um cubo é mais pequeno (que o cubo);
b) Qualquer dodecaedro tem um cubo junto a si; e
c) A relação “junto de” é simétrica (axioma de Tarski);

então pode concluir-se que para qualquer dodecaedro existe um objecto maior do que ele (o dodecaedro).

$$
\begin{array}{l|l}
\textbf{F1.} & \forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \to \forall y\ (\mathrm{Adjoins}(y,x) \to \mathrm{Larger}(x,y))) \\
\textbf{F2.} & \forall x\ (\mathrm{Dodec}(x) \to \exists y\ (\mathrm{Cube}(y) \land \mathrm{Adjoins}(y,x))) \\
\textbf{A1.} & \forall x\ \forall y\ (\mathrm{Adjoins}\ (x,y) \to \mathrm{Adjoins}(y,x)) \\
\hline
\textbf{C.} & \forall y\ (\mathrm{Dodec}(x) \to \exists y\ \mathrm{Larger}(y,x))
\end{array}
\ \mathcal{R}
$$

Como anteriormente passemos as premissas e a negação da conclusão para a forma clausal.

Nota: Por contradição deveremos encontrar um dodecaedro que não tem nenhum objecto maior que ele!

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 6 (cont):

```
F1. ∀x (Cube(x) → ∀y (Adjoins(x,y) →  Larger(x,y)))
 ➔ ∀x (¬ Cube(x) ∨ ∀y (¬ Adjoins(x,y) ∨  Larger(x,y)))
 ➔ ∀x ∀y (¬ Cube(x) ∨ ¬Adjoins(x,y) ∨  Larger(x,y)))
 ➔ C1. ¬Cube(x1) ∨ ¬Adjoins(x1,y1) ∨ Larger(x1,y1)

F2. ∀x (Dodec(x) → ∃y (Cube(y) ∧  Adjoins(x,y)))
 ➔ ∀x∃y (¬Dodec(x) ∨ (Cube(y) ∧ Adjoins(x,y)))
 ➔ C2. ¬Dodec(x2) ∨ Cube(c(x2))
 ➔ C3. ¬Dodec(x3) ∨ Adjoins(x3,c(x3))

A1. ∀x ∀y (Adjoins (x,y) → Adjoins(y,x))
 ➔ C4. ¬Adjoins(x4,y4) ∨ Adjoins(y4,x4)

¬C. ¬∀x (Dodec(x) → ∃y Larger(y,x))
 ➔ ¬∀x∃y (¬Dodec(x) ∨ Larger(y,x))
 ➔ ∃x∀y (Dodec(x) ∧ ¬Larger(y,x))
 ➔ ∀y (Dodec(a) ∧ ¬Larger(y,a))
 ➔ C5. Dodec(a)
 ➔ C6. ¬Larger(y6,a)
```

% Nota: O **dodec a** não tem nenhum objecto maior que ele?

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 6 (cont):

- Uma vez obtidas as cláusulas pode obter-se a cláusula vazia.

C1.	¬Cube(x1) ∨ ¬Adjoins(x1,y1) ∨ Larger(x1,y1)	
C2.	¬Dodec(x2) ∨ Cube(c(x2))	
C3.	¬Dodec(x3) ∨ Adjoins(x3,c(x3))	
C4.	¬Adjoins(x4,y4) ∨ Adjoins(y4,x4)	
C5.	Dodec(a)	
C6.	¬Larger(y6,a)	
C7.	¬Cube(x1) ∨ ¬Adjoins(x1,a)	Res 6, 1 {y6/x1, y1/a}
C8.	¬Dodec(x2) ∨ ¬Adjoins(c(x2),a)	Res 7, 2 {x1/c(x2)}
C9.	¬Adjoins(c(a),a)	Res 8, 5 {x2/a}
C10.	¬Adjoins(a,c(a))	Res 9, 4 {x4/a, y4/c(a)}
C11.	¬Dodec(a)	Res 10,3 {x3/a}
C12.	□	Res 11,6 { }

- **Nota**: **O objecto y6** = x1 = c(x2) = **c(a)**, isto é o cubo que está junto ao **dodecaedro a**, é o objecto que **é maior que a** (o não ser maior conduziu à contradição).

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 7:

Sabendo que:

a) Todo o cubo que tem um objecto ao seu lado é pequeno;
b) Existem um dodecaedro e um cubo ao lado um do outro;
c) A relação "junto de" é simétrica (axioma de Tarski);

então pode concluir-se que existe um objecto pequeno.

$$
\begin{array}{l|l}
\textbf{F1.} & \forall x\ ((\mathrm{Cube}(x) \wedge \exists y\ \mathrm{Adjoins}(y,x)) \rightarrow \mathrm{Small}(x))) \\
\textbf{F2.} & \exists x\ (\mathrm{Dodec}(x) \wedge \exists y\ (\mathrm{Cube}(y) \wedge \mathrm{Adjoins}(x,y))) \\
\textbf{A1.} & \forall x\ \forall y\ (\mathrm{Adjoins}\ (x,y) \rightarrow \mathrm{Adjoins}(y,x)) \\
\hline
\textbf{C.} & \exists x\ \mathrm{Small}(x) \quad \mathcal{R}
\end{array}
$$

Como anteriormente passemos as premissas e a negação da conclusão para a forma clausal.

Nota: Por contradição deveremos encontrar um objecto que não é pequeno. Qual?.

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 7 (cont):

F1. $\forall x\ ((\mathrm{Cube}(x) \land \exists y\ \mathrm{Adjoins}(y,x)) \to \mathrm{Small}(x))$

➔ $\forall x\ (\neg(\mathrm{Cube}(x) \land \exists y\ \mathrm{Adjoins}(y,x)) \lor \mathrm{Small}(x))$

➔ $\forall x\ (\neg\mathrm{Cube}(x) \lor \neg \exists y\ \mathrm{Adjoins}(y,x)) \lor \mathrm{Small}(x))$

➔ $\forall x\ (\neg\mathrm{Cube}(x) \lor \forall y\ \neg\mathrm{Adjoins}(y,x)) \lor \mathrm{Small}(x))$

➔ $\forall x\ \forall y\ (\neg\mathrm{Cube}(x) \lor \neg\mathrm{Adjoins}(y,x) \lor \mathrm{Small}(x))$

➔ C1. $\neg\mathrm{Cube}(x) \lor \neg\mathrm{Adjoins}(y,x) \lor \mathrm{Small}(x)$

F2. $\exists x\ (\mathrm{Dodec}(x) \land \exists y\ (\mathrm{Cube}(y) \land \mathrm{Adjoins}(x,y)))$

➔ $\exists x \exists y\ (\mathrm{Dodec}(x) \land (\mathrm{Cube}(y) \land \mathrm{Adjoins}(x,y)))$

➔ C2. $\mathrm{Dodec}(d)$

➔ C3. $\mathrm{Cube}(c)$

➔ C4. $\mathrm{Adjoins}(d,c)$

A1. $\forall x\ \forall y\ (\mathrm{Adjoins}\ (x,y) \to \mathrm{Adjoins}(y,x))$

➔ C5. $\neg\mathrm{Adjoins}(x5,y5) \lor \mathrm{Adjoins}(y5,x5)$

¬C. $\neg \exists x\ \mathrm{Small}(x)$

➔ $\forall x\ \neg\mathrm{Small}(x)$

➔ C6. $\neg\mathrm{Small}(x6)$

Exemplos de Demonstrações no Sistema $\mathcal{R}$

Exemplo 7 (cont):

- Uma vez obtidas as cláusulas pode obter-se a cláusula vazia.

C1.	¬Cube(x1) ∨ ¬Adjoins(y1,x1) ∨ Small(x1)	
C2.	Dodec(d)	
C3.	Cube(c)	
C4.	Adjoins(c,d)	
C5.	¬Adjoins(x5,y5) ∨ Adjoins(y5,x5)	
C6.	¬Small(x6)	
C7.	¬Cube(x1) ∨ ¬Adjoins(y1,x1)	Res 6, 1 {x6/x1}
C8.	¬Adjoins(y1,c)	Res 7, 3 {x1/c}
C9.	¬Adjoins(c,y1)	Res 8, 5 {x5/c, y5/y1}
C10.	□	Res 9, 5 {y1/d}

- **Nota**: Similarmente ao caso anterior, **x6** = x1 = **c**, isto é, o cubo que está junto ao **dodecaedro d**, é o objecto que **é pequeno** (o facto de não o ser, conduziu à cláusula vazia / contradição).