

# Lógica Computacional

---

- Resolução na Lógica de Predicados
- Forma Clausal de FBFs
- Skolemização
- Unificação e Unificadores
- Algoritmo Martelli-Montanari

# Resolução na Lógica de Predicados

---

- O método de resolução pode ser generalizado da Lógica Proposicional para a Lógica de Predicados, mas para esse efeito é necessário algumas adaptações tendo em conta a quantificação das fórmulas em causa.
- Mais especificamente, mantêm-se a noção de que uma demonstração é uma refutação, ou seja a dedução da cláusula vazia através da regra de resolução, mas é necessário:
  - a) Obter cláusulas a partir de fórmulas quantificadas
  - b) Eliminar os quantificadores existenciais
  - c) Generalizar a regra de resolução para lidar com átomos contendo variáveis universalmente quantificadas.

# Cláusulas em Lógica de Predicados

---

- As fórmulas bem formadas (FBF) na Lógica de Predicados não podem em geral ser colocadas numa “forma CNF” já que podem conter quantificadores no seu interior.
- Desta forma para obter na Lógica de Predicados as cláusulas correspondentes a uma FBF é preciso considerar os seguintes passos iniciais:

P1. Colocar a FBF na sua Forma Prenex;

P2. Colocar a matriz na forma CNF

- O exemplo seguinte permite ilustrar este procedimento :

**A:**  $\exists \mathbf{x} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{y} \text{Tet}(\mathbf{y}) \wedge \forall \mathbf{z} (\text{Large}(\mathbf{z}) \rightarrow \text{Between}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})))$

**A1:**  $\exists \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \forall \mathbf{z} (\text{C}(\mathbf{x}) \wedge \text{T}(\mathbf{y}) \wedge (\text{L}(\mathbf{z}) \rightarrow \text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})))$

**A2:**  $\exists \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \forall \mathbf{z} (\text{C}(\mathbf{x}) \wedge \text{T}(\mathbf{y}) \wedge (\neg \text{L}(\mathbf{z}) \vee \text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})))$

# Cláusulas em Lógica de Predicados

---

- Os próximos exemplos ilustram outros tipos de fórmulas com 3 quantificadores:

**B:**  $\forall \mathbf{x} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{y} (\text{Tet}(\mathbf{y}) \wedge \exists \mathbf{z} (\text{Between}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))))$

**B1:**  $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \exists \mathbf{z} (\text{C}(\mathbf{x}) \rightarrow (\text{T}(\mathbf{y}) \wedge \text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})))$

**B2:**  $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \exists \mathbf{z} ((\neg \text{C}(\mathbf{x}) \vee \text{T}(\mathbf{y})) \wedge (\neg \text{C}(\mathbf{x}) \vee \text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})))$

**C:**  $\exists \mathbf{x} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \wedge \forall \mathbf{y} (\text{Tet}(\mathbf{y}) \rightarrow \exists \mathbf{z} \text{Between}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})))$

**C1:**  $\exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} (\text{C}(\mathbf{x}) \wedge (\text{T}(\mathbf{y}) \rightarrow \text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})))$

**C2:**  $\exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} (\text{C}(\mathbf{x}) \wedge (\neg \text{T}(\mathbf{y}) \vee \text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})))$

**D:**  $\forall \mathbf{x} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\text{Tet}(\mathbf{y}) \rightarrow \exists \mathbf{z} (\text{Between}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))))$

**D1:**  $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} (\text{C}(\mathbf{x}) \rightarrow (\text{T}(\mathbf{y}) \rightarrow (\text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))))$

**D2:**  $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} (\neg \text{C}(\mathbf{x}) \vee \neg \text{T}(\mathbf{y}) \vee \text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))$

# Skolemização

---

- Considere-se a frase “*existem um ou mais cubos*” representada pela fórmula  $P_1$

$$P_1 =_{\text{def}} \exists \mathbf{x} \text{ Cube}(\mathbf{x})$$

- Esta frase não é equivalente a outra que indica que “*existe 1 cubo*”. Caso o nome  $\mathbf{c}$  não denote qualquer outro objecto (no contexto) esta segunda frase pode utilizar a atribuição deste nome e ser representada pela fórmula  $Q_1$

$$Q_1 =_{\text{def}} \text{Cube}(\mathbf{c})$$

- Com efeito, a primeira é mais “geral”, sendo **compatível** com a possibilidade de existirem 2 cubos, enquanto que a primeira não.
- No entanto, provar que é falso que “*existem um ou mais cubos*” é equivalente a provar que é falso que “*existe 1 cubo*”, tenha ele o nome  $\mathbf{c}$  ou outro nome qualquer.
- Desta forma, no *contexto de uma refutação*, a fórmula  $\mathbf{P}$  pode ser substituída por  $\mathbf{Q}$ , tal como proposto por Skolem.
- Esta constatação pode ser generalizada para outras frases existenciais.

# Skolemização

---

- Considere-se agora a frase “*para cada cubo existem um ou mais tetraedros ao seu lado*” representada pela fórmula  $P_2$

$$P_2 =_{\text{def}} \forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \rightarrow (\text{Tet}(\mathbf{y}) \wedge \text{Adjoins}(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$$

- Tal como anteriormente, esta frase não é equivalente a outra que indica que “*para cada cubo existe 1 tetraedro ao seu lado*”. Esses tetraedro, único para cada cubo  $\mathbf{x}$ , mas que pode ser diferente para cubos diferentes, pode ser denotado por  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  em que  $\mathbf{t}$  é uma função (não utilizada no contexto), e representar a frase pela fórmula  $Q_2$

$$Q_2 =_{\text{def}} \forall \mathbf{x} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{Tet}(\mathbf{t}(\mathbf{x})) \wedge \text{Adjoins}(\mathbf{x}, \mathbf{t}(\mathbf{x})))$$

- Com efeito, a primeira é mais “geral”, sendo **compatível** com a possibilidade de existirem 2 tetraedros para cada cubo, enquanto que a primeira não.
- No entanto, provar que é falso que frase “*para cada cubo existem um ou mais tetraedros ao seu lado*” é equivalente a provar que é falso que “*para cada cubo existe 1 tetraedro ao seu lado*”, tenha ele o nome  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  ou outro nome qualquer.
- No *contexto de uma refutação*, e generalizando o resultado anterior, a fórmula **P2** pode ser substituída por **Q2**.

# Skolemização

---

- Os exemplos anteriores justificam pois a skolemização formalizada de seguida.

## Skolemização:

Dada uma fórmula bem formada na forma Prenex, a sua forma normal skolemizada obtém-se substituindo todas as ocorrências na matriz de variáveis existencialmente quantificadas por novas funções das variáveis quantificadas universalmente que (no prefixo da forma Prenex) as precedem.

- Estas funções são denominadas funções de Skolem (ou constantes de Skolem se a variável existencialmente quantificada for a primeira no prefixo).

## Exemplos:

- $\exists \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \forall \mathbf{z} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \rightarrow \quad \forall \mathbf{z} P(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{z})$
- $\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \exists \mathbf{z} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \rightarrow \quad \forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}))$
- $\exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \rightarrow \quad \forall \mathbf{y} P(\mathbf{a}, \mathbf{y}, h(\mathbf{y}))$
- $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \rightarrow \quad \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$

# Forma Clausal em Lógica de Predicados

---

- Uma vez skolemizadas as fórmulas ficamos em condições de concluir a transformação das fórmulas iniciais para a forma clausal com os seguintes passos adicionais:

P3. **Skolemizar** a FBF na forma Prenex com matriz em CNF.

P4. **Circunscrever** os quantificadores aos conjuntos CNF.

P5. **Renomear** as variáveis universalmente quantificadas.

P6. **Separar** as cláusulas, mantendo constantes e funções.

P7. **Eliminar** os quantificadores universais, renomeando as variáveis.

- A **circunscrição** e **renomeação** das variáveis tem em conta as equivalências

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x})) \\ \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \wedge \forall \mathbf{x} Q(\mathbf{x}) & \quad - \text{ circunscrição} \\ \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \wedge \forall \mathbf{y} Q(\mathbf{y}) & \quad - \text{ renomeação} \end{aligned}$$

generalizáveis ao caso em que existam várias variáveis quantificadas universalmente.

- A **eliminação** dos quantificadores é uma mera “operação de cosmética”. Uma vez que todas as variáveis que se mantêm são universalmente quantificadas, e têm diferentes “nomes”, podem apagar-se os quantificadores, ficando a quantificação subentendida (senão as fórmulas resultantes não teriam significado, pois as variáveis seriam livres).



# Forma Clausal em Lógica de Predicados

---

- Podemos agora completar as transformações das fórmulas inicialmente apresentadas.

$$\mathbf{A: \exists x (Cube(x) \wedge \exists y Tet(y) \wedge \forall z (Large(z) \rightarrow Between(z, x, y)))}$$

- Passagem à forma Prenex

$$\mathbf{A1: \exists x \exists y \forall z (C(x) \wedge T(y) \wedge (L(z) \rightarrow B(z, x, y)))}$$

- Passagem a CNF da Matriz

$$\mathbf{A2: \exists x \exists y \forall z (C(x) \wedge T(y) \wedge (\neg L(z) \vee B(z, x, y)))}$$

- Skolemização da forma Prenex

$$\mathbf{A3: \forall z (C(a) \wedge T(b) \wedge (\neg L(z) \vee B(z, a, b)))}$$

- Circunscrição de Quantificadores

$$\mathbf{A4: C(a) \wedge T(b) \wedge \forall z (\neg L(z) \vee B(z, a, b))}$$

- Renomeação de Variáveis

$$\mathbf{A5: C(a) \wedge T(b) \wedge \forall x1 (\neg L(x1) \vee B(x1, a, b))}$$

- Separação de Cláusulas

$$\mathbf{A6: \{C(a) , T(b) , \forall x1 (\neg L(x1) \vee B(x1, a, b)) \}}$$

- Apagamento de Quantificadores

$$\mathbf{A7: \{C(a) , T(b) , \neg L(x1) \vee B(x1, a, b) \}}$$

# Forma Clausal em Lógica de Predicados

---

- As outras fórmulas são transformadas similarmente:

$$\mathbf{B}: \forall \mathbf{x} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{y} (\text{Tet}(\mathbf{y}) \wedge \exists \mathbf{z} (\text{Between}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))))$$

$$\mathbf{B1}: \forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \exists \mathbf{z} (\text{C}(\mathbf{x}) \rightarrow (\text{T}(\mathbf{y}) \wedge \text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})))$$

$$\mathbf{B2}: \forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \exists \mathbf{z} ((\neg \text{C}(\mathbf{x}) \vee \text{T}(\mathbf{y})) \wedge (\neg \text{C}(\mathbf{x}) \vee \text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})))$$

$$\mathbf{B3}: \forall \mathbf{x} ((\neg \text{C}(\mathbf{x}) \vee \text{T}(f(\mathbf{x}))) \wedge (\neg \text{C}(\mathbf{x}) \vee \text{B}(g(\mathbf{x}), \mathbf{x}, f(\mathbf{x}))))$$

$$\mathbf{B4}: \forall \mathbf{x} ((\neg \text{C}(\mathbf{x}) \vee \text{T}(f(\mathbf{x}))) \wedge \forall \mathbf{x} ((\neg \text{C}(\mathbf{x}) \vee \text{B}(g(\mathbf{x}), \mathbf{x}, f(\mathbf{x}))))$$

$$\mathbf{B5}: \forall \mathbf{x1} ((\neg \text{C}(\mathbf{x1}) \vee \text{T}(f(\mathbf{x1}))) \wedge \forall \mathbf{x2} ((\neg \text{C}(\mathbf{x2}) \vee \text{B}(g(\mathbf{x2}), \mathbf{x2}, f(\mathbf{x2}))))$$

$$\mathbf{B6}: \{ \forall \mathbf{x1} ((\neg \text{C}(\mathbf{x1}) \vee \text{T}(f(\mathbf{x1}))) , \forall \mathbf{x2} ((\neg \text{C}(\mathbf{x2}) \vee \text{B}(g(\mathbf{x2}), \mathbf{x2}, f(\mathbf{x2})))) \}$$

$$\mathbf{B7}: \{ \neg \text{C}(\mathbf{x1}) \vee \text{T}(f(\mathbf{x1})) , \neg \text{C}(\mathbf{x2}) \vee \text{B}(g(\mathbf{x2}), \mathbf{x2}, f(\mathbf{x2})) \}$$

- Neste exemplo de transformação da fórmula **B**, esta foi considerada isoladamente em relação à fórmula **A**. Se se pretendesse transformar simultaneamente as fórmulas **A** e **B** teriam de ser usadas variáveis, constantes e funções de Skolem distintas.

- Especificamente, na transformação exemplo, da fórmula **B**, não se poderia usar a variável **x1** (usada na transformação de **A**).

# Forma Clausal em Lógica de Predicados

---

- As outras fórmulas são transformadas similarmente:

**C:**  $\exists \mathbf{x} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \wedge \forall \mathbf{y} (\text{Tet}(\mathbf{y}) \rightarrow \exists \mathbf{z} \text{Between}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))))$

**C1:**  $\exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} (\text{C}(\mathbf{x}) \wedge (\text{T}(\mathbf{y}) \rightarrow \text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))))$

**C2:**  $\exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} (\text{C}(\mathbf{x}) \wedge (\neg \text{T}(\mathbf{y}) \vee \text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))))$

**C3:**  $\forall \mathbf{y} (\text{C}(\mathbf{a}) \wedge (\neg \text{T}(\mathbf{y}) \vee \text{B}(\mathbf{a}, \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{y}))))$

**C4:**  $\text{C}(\mathbf{a}) \wedge \forall \mathbf{y} (\neg \text{T}(\mathbf{y}) \vee \text{B}(\mathbf{a}, \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{y})))$

**C5:**  $\text{C}(\mathbf{a}) \wedge \forall \mathbf{x1} (\neg \text{T}(\mathbf{x1}) \vee \text{B}(\mathbf{a}, \mathbf{x1}, \mathbf{f}(\mathbf{x1})))$

**C6:**  $\{ \text{C}(\mathbf{a}), \forall \mathbf{x1} (\neg \text{T}(\mathbf{x1}) \vee \text{B}(\mathbf{a}, \mathbf{x1}, \mathbf{f}(\mathbf{x1}))) \}$

**C7:**  $\{ \text{C}(\mathbf{a}), \neg \text{T}(\mathbf{x1}) \vee \text{B}(\mathbf{a}, \mathbf{x1}, \mathbf{f}(\mathbf{x1})) \}$

- Uma vez mais, neste exemplo, a fórmula **C** foi considerada isoladamente das fórmulas **A** e **B**. Se se pretendesse transformar simultaneamente a fórmula **C** com as fórmulas **A** e **B**, não poderiam ser usadas a variável **x1** (usada em **A** e em **B**) nem a constante **a** (usada em **A**) nem a função **f** (usada em **B**).

# Forma Clausal em Lógica de Predicados

---

- Finalmente para a fórmula D, igualmente vista isoladamente:

D:  $\forall \mathbf{x} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \rightarrow \forall \mathbf{y} (\text{Tet}(\mathbf{y}) \rightarrow \exists \mathbf{z} (\text{Between}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))))$

D1:  $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} (\text{C}(\mathbf{x}) \rightarrow (\text{T}(\mathbf{y}) \rightarrow (\text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))))$

D2:  $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{z} (\neg \text{C}(\mathbf{x}) \vee \neg \text{T}(\mathbf{y}) \vee \text{B}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))$

D3:  $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\neg \text{C}(\mathbf{x}) \vee \neg \text{T}(\mathbf{y}) \vee \text{B}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y}))$

D4:  $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} (\neg \text{C}(\mathbf{x}) \vee \neg \text{T}(\mathbf{y}) \vee \text{B}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y}))$

D5:  $\forall \mathbf{x1} \forall \mathbf{x2} (\neg \text{C}(\mathbf{x1}) \vee \neg \text{T}(\mathbf{x2}) \vee \text{B}(\mathbf{f}(\mathbf{x1}, \mathbf{x2}), \mathbf{x1}, \mathbf{x2}))$

D6:  $\{ \forall \mathbf{x1} \forall \mathbf{x2} (\neg \text{C}(\mathbf{x1}) \vee \neg \text{T}(\mathbf{x2}) \vee \text{B}(\mathbf{f}(\mathbf{x1}, \mathbf{x2}), \mathbf{x1}, \mathbf{x2})) \}$

D7:  $\{ \neg \text{C}(\mathbf{x1}) \vee \neg \text{T}(\mathbf{x2}) \vee \text{B}(\mathbf{f}(\mathbf{x1}, \mathbf{x2}), \mathbf{x1}, \mathbf{x2}) \}$

- De notar que neste caso a função **f/2** tem dois argumentos e nunca se confundiria com as funções **f/1**, de um só argumento, usadas na transformação de **B** e de **C**.

# Unificação

---

- Uma vez obtidas as cláusulas que deverão ser resolvidas, há que estender a regra de Resolução para o caso em que as cláusulas contêm variáveis.
- Para justificar esta extensão, consideremos as cláusulas, num mesmo contexto, correspondentes às fórmulas indicadas,

$$\forall \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \rightarrow Q(\mathbf{x})) \rightarrow \neg P(\mathbf{x1}) \vee Q(\mathbf{x1})$$

$$\forall \mathbf{x} (Q(\mathbf{x}) \rightarrow R(\mathbf{x})) \rightarrow \neg Q(\mathbf{x2}) \vee R(\mathbf{x2})$$

das quais se deveria poder deduzir a fórmula e respectiva cláusula

$$\forall \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \rightarrow R(\mathbf{x})) \rightarrow \neg P(\mathbf{x3}) \vee R(\mathbf{x3})$$

- Esta cláusula poderia ser obtida por resolução das cláusulas iniciais em ordem a Q, mas  $Q(\mathbf{x1})$  não é um “literal complementar” de  $\neg Q(\mathbf{x2})$ , pois usam variáveis diferentes!
- Naturalmente sendo  $\mathbf{x1}$  e  $\mathbf{x2}$  variáveis universalmente quantificadas, elas podem tomar qualquer valor, e portanto ser ambas aplicadas ao mesmo objecto. Mas esta situação pode complicar-se por múltiplas ocorrências das variáveis.
- Mais formalmente, para resolver duas cláusulas, é necessário que os literais complementares que aparecem nas duas cláusulas sejam **unificados**.

# Unificação

---

- Em geral, iremos utilizar a notação  $x_i, y_i, z_i, \dots$  para as diferentes variáveis que ocorram numa cláusula  $i$  do conjunto de cláusulas que se pretende refutar.
- Sem se poder tratar desta matéria em toda profundidade, poderemos mesmo assim utilizar as seguintes definições e exemplos:

## Unificação 1:

Dois **termos** são **unificáveis** se existir uma **substituição** das suas variáveis que os torne **idênticos**.

- Nota: Nesta definição, **termo** aplica-se quer a variáveis, quer a predicados, quer a funções, que como vimos aparecem naturalmente em cláusulas, nomeadamente através da Skolemização.

## Substituição:

Uma substituição  $\sigma$  é um conjunto de pares  $v_i/\omega_i$  em que as variáveis  $v_i$  são todas diferentes, e os termos  $\omega_i$  não contêm as variáveis  $v$ .

# Unificação

---

## Exemplos:

- Uma variável pode ser unificada com uma constante, uma função de outras variáveis ou outra variável,

$$\text{Ex.1: } T(y_1) \approx T(a) \quad \sigma = \{ y_1/a \}$$

$$\text{Ex.2: } T(y_1) \approx T(f(y_2)) \quad \sigma = \{ y_1/f(y_2) \}$$

- Tendo em atenção que as variáveis que aparecem nas cláusulas são (implicitamente) quantificadas universalmente, a unificação de uma variável com uma constante ou função corresponde basicamente à sua instanciação universal.

$$\text{Ex.3: } T(y_1) \approx T(y_2) \quad \sigma = \{ y_1/y_2 \} \text{ ou } \{ y_2/y_1 \}$$

- A substituição de variáveis por outras variáveis corresponde apenas à sua renomeação, quer para garantir que se passam a referir as mesmo objecto, quer para evitar ambiguidades sobre o escopo dos quantificadores que estão implícitos nas cláusulas.
- De notar que uma variável não pode ser unificada com uma função que a contém (**occurs-check**) o que será justificado adiante.

# Unificação

---

- A unificação de termos exige normalmente a unificação em simultâneo do conjunto de todos os seus argumentos, geralmente um conjunto com mais do que um elemento.

$$\text{Ex. 4: } T(x_1, a) \approx T(b, y_2) \quad \sigma = \{ x_1/b, y_2/a \}$$

- O próximo exemplo ilustra como as coisas se podem complicar ...

$$\text{Ex. 5: } T(x_1, y_1, f(x_1, y_1)) \approx T(x_2, g(x_2), z_2)$$

$$\sigma = \{ x_1/x_2, y_1/g(x_2), z_2/f(x_2, g(x_2)) \} \quad \text{ou}$$

$$\sigma = \{ x_2/x_1, y_1/g(x_1), z_2/f(x_1, g(x_1)) \}$$

- Neste caso, ao substituir  $z_2$  pelo termo  $f(x_1, y_1)$  há que ter em atenção que quer  $x_1$  quer  $x_2$  são variáveis que já foram previamente substituídas e usar os termos pelos quais foram substituídos.
- Assim sendo, uma substituição de vários termos simultaneamente pode envolver recursivamente várias substituições prévias pelo que é fundamental garantir que essa recursividade termina.



# Unificação

---

## - Occurs-Check:

$$\text{Ex. 6: } T(\mathbf{x1}, \mathbf{x1}) \approx T(\mathbf{x2}, f(\mathbf{x2})) \quad \sigma = \{ \mathbf{x1}/\mathbf{x2}, \mathbf{x2}/f(\mathbf{x2}) \}$$

- Neste caso, o par  $\mathbf{x2}/f(\mathbf{x2})$  aparece **erradamente** na substituição, já que a variável a substituir,  $\mathbf{x2}$ , aparece no termo  $f(\mathbf{x2})$ , pelo qual deveria voltar a ser substituída. Assim o processo de substituição deveria continuar recursivamente, originando o termo infinito

$$\mathbf{x2}/f(f(f(\dots f(\mathbf{x2}) \dots)))$$

- De um ponto de vista semântico, consideremos o predicado  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  e a função  $m(\mathbf{x})$  interpretados como “x gosta de y” e “mãe de x”, respectivamente.
- Se os termos  $G(\mathbf{x1}, \mathbf{x1})$  e  $G(\mathbf{x2}, m(\mathbf{x2}))$  fossem erradamente unificados como acima, incluindo o par  $\mathbf{x1}/m(\mathbf{x1})$ , então estaríamos numa situação em que *alguém seria a sua própria mãe*.
- Com efeito, se os predicados se aplicassem a uma pessoa, por exemplo à Ana, estaríamos a unificar “a Ana gosta de si própria” com “a Ana gosta da sua mãe”, ou seja que as pessoas de quem a Ana gosta (a Ana e a sua Mãe) seriam as mesmas!

# Unificação e Unificadores

---

## Unificador:

Um unificador de dois (ou mais) termos é uma substituição que os permite unificar.

## Aplicação de Substituição:

A aplicação de uma substituição  $\sigma$  a uma fórmula  $T$ , denotada por  $T\sigma$ , obtém-se por substituição de toda a variável  $v$  que ocorre em  $T$  pelo termo  $\omega$ , sempre que o par  $v/\omega$  seja um elemento de  $\sigma$ .

- Com estes conceitos podemos redefinir a noção de Unificação:

## Unificação 2:

Dois **termos** são **unificáveis** se existir um seu unificador.

De notar que dois termos podem ter mais do que um unificador, como pode ser verificado nos exemplos seguintes.

# Unificadores Mais Gerais

---

- Na unificação de dois termos  $T_1$  e  $T_2$ , são identificados diferentes unificadores  $\sigma$  e os correspondentes termos unificados  $T = P_1\sigma = P_2\sigma$

$$P(x_1, y_1) \approx P(x_2, y_2)$$

- $\sigma_1 = \{ x_1/x_2, y_1/y_2 \}$        $T = P(x_2, y_2)$
- $\sigma_2 = \{ x_2/x_1, y_2/y_1 \}$        $T = P(x_1, y_1)$
- $\sigma_3 = \{ x_2/x_1, y_1/b, y_2/b \}$        $T = P(x_1, b)$
- $\sigma_4 = \{ x_1/a, x_2/a, y_1/y_2 \}$        $T = P(a, y_2)$
- $\sigma_5 = \{ x_1/a, x_2/a, y_1/b, y_2/b \}$        $T = P(a, b)$
- $\sigma_6 = \{ x_1/c, x_2/c, y_1/d, y_2/d \}$        $T = P(c, d)$

- Os dois primeiros unificadores  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  correspondem a variantes do mesmo unificador (troca de variáveis substituídas pelas variáveis a substituir).
- Mas o unificador  $\sigma_1$  é **mais geral** que o unificador  $\sigma_3$  pois os termos resultantes podem ser unificados com mais termos. Por exemplo,  $P(a, c)$  é unificável com  $P(x_1, x_2)$  mas não com  $P(x_1, b)$ . De facto,  $\sigma_1$  (e  $\sigma_2$ ) é um **unificador mais geral (mgu)** dos termos  $P_1$  e  $P_2$ .
- Em casos simples, o unificador mais geral pode ser obtido “intuitivamente” não instanciando variáveis mais do que o necessário. De uma forma sistemática, pode ser usado o seguinte algoritmo para se obter um unificador mais geral de dois termos.

# Algoritmo Martelli-Montanari

---

**Algoritmo Martelli-Montanari (MM):** Seja  $U$  um conjunto de pares  $s_i \approx t_i$  de termos.

Enquanto for possível, escolher arbitrariamente (não-deterministicamente) um par de termos de  $U$  de um dos tipos abaixo, e executar a correspondente acção :

1.  $f(s_1, s_2, \dots, s_n) \approx f(t_1, t_2, \dots, t_n)$   
→ substituir em  $U$  pelos pares  $s_1 \approx t_1, s_2 \approx t_2, \dots, s_n \approx t_n$
2.  $f(s_1, s_2, \dots, s_n) \approx g(t_1, t_2, \dots, t_n)$  em que  $f \neq g$   
→ **abortar** - os termos não são unificáveis (**conflito**)
3.  $x \approx x$   
→ apagar o par (**substituição vazia**)
4.  $t \approx x$  em que  $t$  não é uma variável  
→ substituir por  $x \approx t$
5.  $x \approx t$  em que  $x$  não ocorre em  $t$  (mas pode ocorrer noutros pares)  
→ substituir por  $x / t$  e aplicar a substituição  $\{ x / t \}$  em todos os pares de  $U$
6.  $x \approx t$  em que  $x$  ocorre em  $t$  e  $x \neq t$   
→ **abortar** - os termos não são unificáveis (**occurs-check**).

Se não abortar (nas regras 2 ou 6) o algoritmo termina, com sucesso, quando mais nenhum par puder ser escolhido, sendo o conjunto  $U$  final um unificador mais geral.

# Algoritmo Martelli-Montanari

---

**Exemplo 1:** Unificar os predicados  $P(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$  e  $P(x_2, g(x_2), z_2)$ .

- i.  $U = \{ P(x_1, y_1, f(x_1, y_1)) \approx P(x_2, g(x_2), z_2) \}$
- ii.  $U = \{ x_1 \approx x_2, y_1 \approx g(x_2), f(x_1, y_1) \approx z_2 \}$  por **MM-1**
- iii.  $U = \{ x_1/x_2, y_1 \approx g(x_2), f(x_2, y_1) \approx z_2 \}$  por **MM-5**
- iv.  $U = \{ x_1/x_2, y_1/g(x_2), f(x_2, g(x_2)) \approx z_2 \}$  por **MM-5**
- v.  $U = \{ x_1/x_2, y_1/g(x_2), z_2 \approx f(x_2, g(x_2)) \}$  por **MM-4**
- vi.  $\theta = \{ x_1/x_2, y_1/g(x_2), z_2/f(x_2, g(x_2)) \}$  por **MM-5**

- Aplicando-se esta substituição a qualquer dos predicados obtém-se o termo unificado

$$P(x_2, g(x_2), f(x_2, g(x_2)))$$

- De notar que o unificador mais geral obtido pelo algoritmo MM é uma variante do unificador que tínhamos obtido atrás de uma forma “intuitiva”

$$\sigma = \{ x_2/x_1, y_1/g(x_1), z_2/f(x_1, g(x_1)) \}$$

- De facto a única diferença é que neste unificador  $\sigma$ ,  $x_2$  é substituído por  $x_1$  e no unificador  $\theta$  obtido pelo algoritmo MM é o contrário que se verifica.