

# Lógica Computacional

---

Estratégias de Demonstração no Sistema DN

Regras Heurísticas

Exemplos

# Estratégias de Demonstração

---

- Sendo demonstrável que o sistema DN é coerente e completo, existe a garantia de que qualquer consequência-lógica (FO) é demonstrável no sistema DN.
- No entanto, esta garantia não fornece pistas sobre como podem ser obtidas essas demonstrações.
- Embora não existam procedimentos determinísticos, existem heurísticas que geralmente guiam de uma forma conveniente as demonstrações e indicam quais as regras do sistema a utilizar em cada instante.
- Para além das regras indicadas para o sistema DNp (sem quantificadores) podem incluir-se
  - Se a fórmula a demonstrar é universalmente quantificada utilizar a regras de introdução do  $\forall$
  - Se já existe uma fórmula existencialmente quantificada utilizar a regras de eliminação do  $\exists$ .
  - Nos casos em que não existem outras pistas, tentar o raciocínio por absurdo
- Alguns exemplos irão ilustrar a estratégia a utilizar

# Estratégias de Demonstração

---

## Exemplo:

$$\{ \forall \mathbf{x} (\text{Dodec}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{LeftOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a})), \forall \mathbf{x} (\text{Tet}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{RightOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a})) \}$$
$$\vdash_{\text{DN}} \forall \mathbf{x} (\text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \rightarrow \text{Cube}(\mathbf{x}))$$

|   |  |   |
|---|--|---|
| 1 |  | $\forall \mathbf{x} (\text{Dodec}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{LeftOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a}))$ |
| 2 |  | $\forall \mathbf{x} (\text{Tet}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{RightOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a}))$  |
|   |  | -----   |
|   |  | $\forall \mathbf{x} (\text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \rightarrow \text{Cube}(\mathbf{x}))$ |

- Para demonstrar a conclusão exclusivamente através de regras do sistema DN, teremos de incluir nas premissas conhecimento sobre o mundo dos blocos, nomeadamente:

- Estar na mesma coluna é incompatível com estar à direita
- Estar na mesma coluna é incompatível com estar à esquerda
- Só existem três formas: tetraedro, cubo e dodecaedro

# Estratégias de Demonstração

---

- Este conhecimento está expresso nos axiomas de Tarski que são adicionados como premissas na demonstração.

|       |   |
|-------|---|
| a1    | $\forall \mathbf{x} (\text{Tet}(\mathbf{x}) \vee \text{Cube}(\mathbf{x}) \vee \text{Dodec}(\mathbf{x}))$                            |
| a2    | $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \neg (\text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{LeftOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$  |
| a3    | $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \neg (\text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{RightOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ |
| 1     | $\forall \mathbf{x} (\text{Dodec}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{LeftOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a}))$                                   |
| 2     | $\forall \mathbf{x} (\text{Tet}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{RightOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a}))$                                    |
| <hr/> |   |
| 30    | $\forall \mathbf{x} (\text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \rightarrow \text{Cube}(\mathbf{x}))$                                   |

- A partir deste momento, a demonstração faz-se exclusivamente através de regras do sistema DN.
- Para esse efeito é conveniente utilizar algumas regras heurísticas para obter a demonstração pretendida, como se fará de seguida.

# Estratégias de Demonstração

- Sendo a frase a demonstrar universalmente quantificada, deverá utilizar-se a regra da introdução do  $\forall$ . Assim
  - Linha 3: assume-se a existência de um objecto,  $c$ , arbitrário
  - Linha 29: obtém-se a fórmula pretendida nesse objecto
  - Linha 30: justifica-se a fórmula obtida

```
a1 |  $\forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$ 
a2 |  $\forall x \forall y \neg (SameCol(x,y) \wedge LeftOf(x,y))$ 
a3 |  $\forall x \forall y \neg (SameCol(x,y) \wedge RightOf(x,y))$ 
1  |  $\forall x (Dodec(x) \rightarrow LeftOf(x, a))$ 
2  |  $\forall x (Tet(x) \rightarrow RightOf(x, a))$ 
3  | c:
   | _____
   | ...
29 | SameCol(c, a)  $\rightarrow$  Cube(c)
30 |  $\forall x (SameCol(x, a) \rightarrow Cube(x))$  Intr  $\forall$ : 3 - 29
```

# Estratégias de Demonstração

- Sendo a frase a demonstrar na linha 29 uma implicação, deverá utilizar-se a regra da introdução do operador  $\rightarrow$ . Assim
  - Linha 4: assume-se a existência do implicante
  - Linha 28: obtém-se a fórmula do implicado
  - Linha 29: justifica-se a fórmula obtida

|    |  |   |  |
|----|--|---|--|
| a1 |  | $\forall \mathbf{x} (\text{Tet}(\mathbf{x}) \vee \text{Cube}(\mathbf{x}) \vee \text{Dodec}(\mathbf{x}))$                            |  |
| a2 |  | $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \neg (\text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{LeftOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$  |  |
| a3 |  | $\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \neg (\text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{RightOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ |  |
| 1  |  | $\forall \mathbf{x} (\text{Dodec}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{LeftOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a}))$                                   |  |
| 2  |  | $\forall \mathbf{x} (\text{Tet}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{RightOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a}))$                                    |  |
| 3  |  |   |  |
|    |  | c:  |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |
|    |  |   |  |

# Estratégias de Demonstração

- A estratégia a seguir para demonstrar que  $c$  é um cubo (linha 28), passa por :
  - Linha 11: demonstrar que não é um dodecaedro
  - Linha 18: demonstrar que não é um tetraedro

|  |   |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
|--|---|-----------------------------|--|-----|--|--|--|-----|--|--|--|-----|--|---------------------|--|--|
| a1   | $\forall x ((\text{Tet}(x) \vee \text{Cube}(x) \vee \text{Dodec}(x)))$  |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| a2   | $\forall x \forall y \neg (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{LeftOf}(x, y))$  |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| a3   | $\forall x \forall y \neg (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{RightOf}(x, y))$   |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| 1  | $\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{LeftOf}(x, a))$   |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| 2  | $\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{RightOf}(x, a))$  |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
|  |   |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| 3  | c:  |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| 4  | <table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">SameCol(c, a)</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">...</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><span style="color: red;">11</span> <math>\neg \text{Dodec}(c)</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">...</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><span style="color: red;">18</span> <math>\neg \text{Tet}(c)</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">...</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">28 <math>\text{Cube}(c)</math></td> <td></td> </tr> </table> | SameCol(c, a)               |  | ... |  | <span style="color: red;">11</span> $\neg \text{Dodec}(c)$ |  | ... |  | <span style="color: red;">18</span> $\neg \text{Tet}(c)$ |  | ... |  | 28 $\text{Cube}(c)$ |  |  |
| SameCol(c, a)  |   |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| ...  |   |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| <span style="color: red;">11</span> $\neg \text{Dodec}(c)$ |   |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| ...  |   |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| <span style="color: red;">18</span> $\neg \text{Tet}(c)$   |   |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| ...  |   |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| 28 $\text{Cube}(c)$  |   |                             |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| 29   | $\text{SameCol}(c, a) \rightarrow \text{Cube}(c)$   | Intr $\rightarrow$ : 4 - 28 |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |
| 30   | $\forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$   | Intr $\forall$ : 3 - 29     |  |     |  |  |  |     |  |  |  |     |  |                     |  |  |

# Estratégias de Demonstração

- A demonstração de que  $c$  não é um dodecaedro pode fazer-se por *Modus Tollens* (na implicação da linha 1) e por absurdo (com a instanciação do axioma **a2** na linha 5)

|    |   |  |  |  |  |
|----|---|--|--|--|--|
| a2 | $\forall x \forall y \neg (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{LeftOf}(x, y))$  |  |  |  |  |
| 1  | $\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{LeftOf}(x, a))$   |  |  |  |  |
|    | ...   |  |  |  |  |
| 4  | <table border="0" style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <tr> <td style="vertical-align: top;">4</td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\text{SameCol}(c, a)</math></td> <td></td> </tr> </table>   | 4  | $\text{SameCol}(c, a)$                                   |  |  |
| 4  | $\text{SameCol}(c, a)$  |  |  |  |  |
| 5  | <table border="0" style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <tr> <td style="vertical-align: top;">5</td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\neg (\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{LeftOf}(c, a))</math></td> <td style="padding-left: 10px;"><b>Elim <math>\forall</math> : a2 (2X)</b></td> </tr> </table> | 5  | $\neg (\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{LeftOf}(c, a))$ | <b>Elim <math>\forall</math> : a2 (2X)</b>   |  |
| 5  | $\neg (\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{LeftOf}(c, a))$  | <b>Elim <math>\forall</math> : a2 (2X)</b>   |  |  |  |
| 6  | <table border="0" style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <tr> <td style="vertical-align: top;">6</td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\text{Dodec}(c)</math></td> <td></td> </tr> </table>  | 6  | $\text{Dodec}(c)$  |  |  |
| 6  | $\text{Dodec}(c)$   |  |  |  |  |
| 7  | <table border="0" style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <tr> <td style="vertical-align: top;">7</td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\text{Dodec}(c) \rightarrow \text{LeftOf}(c, a)</math></td> <td style="padding-left: 10px;"><b>Elim <math>\forall</math> : 1</b></td> </tr> </table>              | 7  | $\text{Dodec}(c) \rightarrow \text{LeftOf}(c, a)$        | <b>Elim <math>\forall</math> : 1</b>         |  |
| 7  | $\text{Dodec}(c) \rightarrow \text{LeftOf}(c, a)$   | <b>Elim <math>\forall</math> : 1</b>         |  |  |  |
| 8  | <table border="0" style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <tr> <td style="vertical-align: top;">8</td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\text{LeftOf}(c, a)</math></td> <td style="padding-left: 10px;"><b>Elim <math>\rightarrow</math> : 6 , 7</b></td> </tr> </table>                                  | 8  | $\text{LeftOf}(c, a)$                                    | <b>Elim <math>\rightarrow</math> : 6 , 7</b> |  |
| 8  | $\text{LeftOf}(c, a)$   | <b>Elim <math>\rightarrow</math> : 6 , 7</b> |  |  |  |
| 9  | <table border="0" style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <tr> <td style="vertical-align: top;">9</td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{LeftOf}(c, a)</math></td> <td style="padding-left: 10px;"><b>Intr <math>\wedge</math> : 4 , 8</b></td> </tr> </table>           | 9  | $\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{LeftOf}(c, a)$        | <b>Intr <math>\wedge</math> : 4 , 8</b>      |  |
| 9  | $\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{LeftOf}(c, a)$   | <b>Intr <math>\wedge</math> : 4 , 8</b>      |  |  |  |
| 10 | <table border="0" style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <tr> <td style="vertical-align: top;">10</td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\perp</math></td> <td style="padding-left: 10px;"><b>Intr <math>\perp</math> : 5 - 9</b></td> </tr> </table>   | 10   | $\perp$  | <b>Intr <math>\perp</math> : 5 - 9</b>       |  |
| 10 | $\perp$   | <b>Intr <math>\perp</math> : 5 - 9</b>       |  |  |  |
| 11 | <table border="0" style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <tr> <td style="vertical-align: top;">11</td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\neg \text{Dodec}(c)</math></td> <td style="padding-left: 10px;"><b>Intr <math>\neg</math> : 6 - 10</b></td> </tr> </table>                                      | 11   | $\neg \text{Dodec}(c)$                                   | <b>Intr <math>\neg</math> : 6 - 10</b>       |  |
| 11 | $\neg \text{Dodec}(c)$  | <b>Intr <math>\neg</math> : 6 - 10</b>       |  |  |  |
|    | ...   |  |  |  |  |
| 30 | $\forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$   |  |  |  |  |



# Estratégias de Demonstração

- A demonstração de que  $c$  não é um tetraedro é semelhante e passa utiliza o *Modus Tollens* (na implicação da linha 2) e o absurdo (com a instanciação do axioma **a3** na linha 12)

|    |   |                              |
|----|---|------------------------------|
| a3 | $\forall x \forall y \neg (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{RightOf}(x, y))$ |                              |
| 2  | $\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{RightOf}(x, a))$                  |                              |
| 1  | ...   |                              |
| 4  | $\text{SameCol}(c, a)$  |                              |
| 5  | $\neg (\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{RightOf}(c, a))$                     | Elim $\forall$ : a3 (2X)     |
| 12 | $\text{Tet}(c)$   |                              |
| 13 | $\text{Tet}(c) \rightarrow \text{RightOf}(c, a)$                              | Elim $\forall$ : 2           |
| 14 | $\text{RightOf}(c, a)$  | Elim $\rightarrow$ : 12 , 13 |
| 15 | $\text{SameCol}(c, a) \wedge \text{RightOf}(c, a)$                            | Intr $\wedge$ : 4 , 14       |
| 16 | $\perp$   | Intr $\perp$ : 5 , 15        |
| 18 | $\neg \text{Tet}(c)$  | Intr $\neg$ : 13 - 16        |
|    | ...   |                              |
| 30 | $\forall x (\text{SameCol}(x, a) \rightarrow \text{Cube}(x))$                 |                              |

# Estratégias de Demonstração

- Finalmente a demonstração de que **c** é um cubo faz-se através do raciocínio por casos, a partir da disjunção obtida na linha 19 por instanciação do axioma **a1**.

|           |   |                                  |
|-----------|---|----------------------------------|
| <b>a1</b> | $\forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$ |                                  |
|           | ...   |                                  |
| <b>11</b> | $\neg Dodec(c)$                                 |                                  |
|           | ...   |                                  |
| <b>18</b> | $\neg Tet(c)$                                   |                                  |
| <b>19</b> | $Tet(c) \vee Cube(c) \vee Dodec(c)$             | Elim $\forall$ : a1              |
| <b>20</b> | $Tet(c)$  |                                  |
| <b>21</b> | $\perp$   | Intr $\perp$ : 18 , 20           |
| <b>22</b> | $Cube(c)$                                       | Elim $\perp$ : 21                |
| <b>23</b> | $Cube(c)$                                       |                                  |
| <b>24</b> | $Cube(c)$                                       | Reit : 23                        |
| <b>25</b> | $Dodec(c)$                                      |                                  |
| <b>26</b> | $\perp$   | Intr $\perp$ : 11 , 25           |
| <b>27</b> | $Cube(c)$                                       | Elim $\perp$ : 26                |
| <b>28</b> | $Cube(c)$                                       | Elim : 19, 20-22 , 23 -24, 25-27 |
|           | ...   |                                  |

# Estratégias de Demonstração

---

**Exemplo 2:**  $\{ \exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \} \vdash_{\text{DN}} \forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

- Sabendo que existe um objecto com uma dada propriedade podemos começar por nomeá-lo, e construir a prova por eliminação do  $\exists$ .
  - Linhas 2 e 6: Seja **a** o objecto indicado pela linha 1.

|   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| 1 |  | $\exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ |   |
| 2 |  | $\mathbf{a}: \forall \mathbf{y} G(\mathbf{y}, \mathbf{a})$        |   |
| 6 |  | $\forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ |   |
| 7 |  | $\forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ | <b>Elim <math>\exists</math> : 1, 2 - 6</b> |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 2:**  $\{ \exists x \forall y G(y, x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall y \exists x G(y, x)$

- Sendo a fórmula 6 a demonstrar universalmente quantificada, deverá utilizar-se a regra da introdução do  $\forall$ . Assim
  - Linha 3: assume-se a existência de um objecto, **b**, arbitrário
  - Linha 5: obtém-se a fórmula pretendida nesse objecto

|   |                               |   |
|---|-------------------------------|---|
| 1 | $\exists x \forall y G(y, x)$ |   |
| 2 | $a: \forall y G(y, a)$        |   |
| 3 | <b>b:</b>                     |   |
| 5 | $\exists x G(b, x)$           |   |
| 6 | $\forall y \exists x G(y, x)$ | <b>Intr <math>\forall</math> : 3 - 5</b>    |
| 7 | $\forall y \exists x G(y, x)$ | <b>Elim <math>\exists</math> : 1, 2 - 6</b> |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 2:**  $\{ \exists x \forall y G(y, x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall y \exists x G(y, x)$

- Finalmente, para obter a fórmula 5 teremos de obter a relação P entre algum bloco e o bloco **b**. Mas esse objecto pode ser o bloco **a**.

- Linha 4: instancia-se a fórmula quantificada universalmente em 2.

|   |                               |   |
|---|-------------------------------|---|
| 1 | $\exists x \forall y G(y, x)$ |   |
| 2 | <b>a:</b> $\forall y G(y, a)$ |   |
| 3 | <b>b:</b>                     |   |
| 4 | $G(b, a)$                     | <b>Elim <math>\forall</math> : 2</b>        |
| 5 | $\exists x G(b, x)$           | <b>Intr <math>\exists</math> : 4</b>        |
| 6 | $\forall y \exists x G(y, x)$ | <b>Intr <math>\forall</math> : 1, 2 - 6</b> |
| 7 | $\forall y \exists x G(y, x)$ | <b>Elim <math>\exists</math> : 1, 2 - 6</b> |

- Uma vez feita esta demonstração podemos igualmente demonstrar a sua “contrapositiva”.

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 3:**  $\{\neg \forall y \exists x G(y, x)\} \vdash_{\text{DN}} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Pretendendo obter uma fórmula negada, deveremos usar a regra de Introdução da  $\neg$ .
  - Linha 2 e 9: assume-se a negação da fórmula e obtem-se a  $\perp$

|    |  |                                    |                                       |
|----|--|------------------------------------|---------------------------------------|
| 1  |  | $\neg \forall y \exists x G(y, x)$ |                                       |
| 2  |  | $\exists x \forall y G(y, x)$      |                                       |
|    |  | ...                                |                                       |
| 9  |  | $\perp$                            |                                       |
| 10 |  | $\neg \exists x \forall y G(y, x)$ | <b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 9</b> |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 3:**  $\{\neg \forall y \exists x G(y, x)\} \vdash_{\text{DN}} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Havendo um objecto com uma dada propriedade (linha 2) podemos nomeá-lo.
  - Seja **a** o objecto indicado pela linha 2.

|    |  |                                    |                               |                               |
|----|--|------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1  |  | $\neg \forall y \exists x G(y, x)$ |                               |                               |
| 2  |  |                                    | $\exists x \forall y G(y, x)$ |                               |
| 3  |  |                                    |                               | <b>a:</b> $\forall y G(y, a)$ |
| 9  |  |                                    |                               | $\perp$                       |
| 10 |  | $\neg \exists x \forall y G(y, x)$ | Intr $\neg$ : 2 - 9           |                               |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 3:**  $\{ \neg \forall y \exists x G(y, x) \} \vdash_{\text{DN}} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- A contradição em 9 advém do bloco a estar em P com todos os blocos e a fórmula 1 que diz que não existe nenhum bloco para o qual não existem blocos em P com ele.

- Linha 8: Obtenha-se a contradição da fórmula 1

|    |                                    |  |
|----|------------------------------------|--|
| 1  | $\neg \forall y \exists x G(y, x)$ |  |
| 2  | $\exists x \forall y G(y, x)$      |  |
| 3  | a: $\forall y G(y, a)$             |  |
|    | ...                                |  |
| 8  | $\forall y \exists x G(y, x)$      |  |
| 9  | $\perp$                            | <b>Intr <math>\perp</math> : 1 - 8</b> |
| 10 | $\neg \exists x \forall y G(y, x)$ | <b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 9</b>  |



# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 3:**  $\{\neg \forall y \exists x G(y, x)\} \vdash_{DN} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Querendo obter em 8 uma fórmula que não contem o nome **a**, essa fórmula deverá ser obtida por eliminação do  $\exists$ .
  - Obtenha-se a fórmula sem o nome **a** em 7

|    |                                    |  |
|----|------------------------------------|--|
| 1  | $\neg \forall y \exists x G(y, x)$ |  |
| 2  | $\exists x \forall y G(y, x)$      |  |
| 3  | $a: \forall y G(y, a)$             |  |
|    | ...                                |  |
| 7  | $\forall y \exists x G(y, x)$      |  |
| 8  | $\forall y \exists x G(y, x)$      | <b>Elim <math>\exists</math> : 2 , 3 - 7</b> |
| 9  | $\perp$                            | <b>Intr <math>\perp</math> : 1 - 8</b>       |
| 10 | $\neg \exists x \forall y G(y, x)$ | <b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 9</b>        |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 3:**  $\{\neg \forall y \exists x G(y, x)\} \vdash_{DN} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Em 7 pretende-se uma fórmula quantificada universalmente, pelo que deverá ser usada a regra de Introdução do  $\forall$ .
  - Assume-se **b** arbitrário em 4, e
  - Obtém-se a fórmula nesse nome em 6

|    |                                    |  |
|----|------------------------------------|--|
| 1  | $\neg \forall y \exists x G(y, x)$ |  |
| 2  | $\exists x \forall y G(y, x)$      |  |
| 3  | $a: \forall y G(y, a)$             |  |
| 4  | $b:$                               |  |
| 6  | $\exists x G(b, x)$                |  |
| 7  | $\forall y \exists x G(y, x)$      | <b>Intr <math>\forall</math> : 4 - 6</b>     |
| 8  | $\forall y \exists x G(y, x)$      | <b>Elim <math>\exists</math> : 1 , 2 - 7</b> |
| 9  | $\perp$                            | <b>Intr <math>\perp</math> : 1 - 8</b>       |
| 10 | $\neg \exists x \forall y G(y, x)$ | <b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 9</b>        |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 3:**  $\{\neg \forall y \exists x G(y, x)\} \vdash_{\text{DN}} \neg \exists x \forall y G(y, x)$

- Para se obter a fórmula 6 teremos de obter a relação P entre um objecto e **b**. Mas esse objecto pode ser o objecto **a**, obtido por instanciação do  $\forall$ .
  - Elimina-se o  $\forall$  em 3

|    |                                    |  |
|----|------------------------------------|--|
| 1  | $\neg \forall y \exists x G(y, x)$ |  |
| 2  | $\exists x \forall y G(y, x)$      |  |
| 3  | $a: \forall y G(y, a)$             |  |
| 4  | $b:$                               |  |
| 5  | $G(b, a)$                          | <b>Elim <math>\forall</math> : 3</b>         |
| 6  | $\exists x G(b, x)$                | <b>Intr <math>\exists</math> : 5</b>         |
| 7  | $\forall y \exists x G(y, x)$      | <b>Intr <math>\forall</math> : 4 - 6</b>     |
| 8  | $\forall y \exists x G(y, x)$      | <b>Elim <math>\exists</math> : 1 , 2 - 7</b> |
| 9  | $\perp$                            | <b>Intr <math>\perp</math> : 1 - 8</b>       |
| 10 | $\neg \exists x \forall y G(y, x)$ | <b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 9</b>        |

# Estratégias de Demonstração

- Podemos agora demonstrar resultados referentes a separação de quantificadores.

**Exemplo 4:**  $\{ \forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \vee \forall \mathbf{x} Q(\mathbf{x}) \} \vdash_{\text{DN}} \forall \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \vee Q(\mathbf{x}))$

- Pretende-se uma fórmula quantificada universalmente, pelo que deverá ser usada a regra de Introdução do  $\forall$ .
  - Assume-se um objecto  $a$  arbitrário em 2, e
  - Obtem-se a fórmula nesse nome em 9

|    |  |  |  |
|----|--|--|--|
| 1  |  | $\forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \vee \forall \mathbf{x} Q(\mathbf{x})$ |  |
| 2  |  | $a:$   |  |
|    |  | .....  |  |
| 9  |  | $P(a) \vee Q(a)$   |  |
| 10 |  | $\forall \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \vee Q(\mathbf{x}))$                  | <b>Intr <math>\forall</math> : 2 - 9</b> |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 4:**  $\{ \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \} \vdash_{\text{DN}} \forall x (P(x) \vee Q(x))$

- A disjunção de a ser P ou Q é uma consequência da disjunção na fórmula 1, que poderemos obter através de cada um dos disjuntos, convenientemente instanciados.
  - Linhas 3 e 6: Assume-se cada um dos disjuntos, e
  - Linhas 5 e 8: Obtém-se a fórmula em ambos os casos

|    |                                      |  |
|----|--------------------------------------|--|
| 1  | $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ |  |
| 2  | a:                                   |  |
| 3  | $\forall x P(x)$                     |  |
| 5  | $P(a) \vee Q(a)$                     |  |
| 6  | $\forall x Q(x)$                     |  |
| 8  | $P(a) \vee Q(a)$                     |  |
| 9  | $P(a) \vee Q(a)$                     | <b>Elim <math>\vee</math> : 1 , 3 - 5, 6 - 8</b> |
| 10 | $\forall x (P(x) \vee Q(x))$         | <b>Intr <math>\forall</math> : 2 - 9</b>         |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 4:**  $\{ \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \} \vdash_{DN} \forall x (P(x) \vee Q(x))$

- Ambas as disjunções são fórmulas enfraquecidas do que se pode obter por instanciação de cada uma das hipóteses..
  - Linhas 4 e 7: Instanciam-se as hipóteses, e
  - Linhas 5 e 8: Obtem-se a fórmula por introdução da  $\vee$

|    |                                      |                                |
|----|--------------------------------------|--------------------------------|
| 1  | $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ |                                |
| 2  | a:                                   |                                |
| 3  | $\forall x P(x)$                     |                                |
| 4  | P(a)                                 | Elim $\forall$ : 3             |
| 5  | P(a) $\vee$ Q(a)                     | Intr $\vee$ : 4                |
| 6  | $\forall x Q(x)$                     |                                |
| 7  | Q(a)                                 | Elim $\forall$ : 6             |
| 8  | P(a) $\vee$ Q(a)                     | Intr $\vee$ : 7                |
| 9  | P(a) $\vee$ Q(a)                     | Elim $\vee$ : 1 , 3 - 5, 6 - 8 |
| 10 | $\forall x (P(x) \vee Q(x))$         | Intr $\forall$ : 2 - 9         |

# Estratégias de Demonstração

---

- Podemos agora demonstrar outro resultado referente a separação de quantificadores.

**Exemplo 4:**  $\{ \exists \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x})) \} \vdash_{\text{DN}} \exists \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{x} Q(\mathbf{x})$

- Pretende-se uma fórmula conjuntiva, pelo que será usada a regra de Introdução da  $\wedge$ .
  - Linhas 5 e 9: Obtém-se cada um dos conjuntos
  - Linha 10: Introdúz-se a  $\wedge$

|       |  |  |   |
|-------|--|--|---|
| 1     |  | $\exists \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x}))$                  |   |
| <hr/> |  |  |   |
| 5     |  | $\exists \mathbf{x} P(\mathbf{x})$   |   |
| 9     |  | $\exists \mathbf{x} Q(\mathbf{x})$   |   |
| 10    |  | $\exists \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{x} Q(\mathbf{x})$ | <b>Intr <math>\wedge</math> : 2 - 9</b> |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 4:**  $\{ \exists \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x})) \} \vdash_{\text{DN}} \exists \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{x} Q(\mathbf{x})$

- Existindo uma fórmula quantificada existencialmente podemos instanciá-la para obter cada uma das fórmulas 5 e 9.
  - Linhas 2 e 6: Atribui-se um nome, **a**, ao objecto existencialmente quantificado
  - Linhas 4 e 8: Obtêm-se as fórmulas 5 e 9, sem o nome atribuído

|    |  |                           |
|----|--|---------------------------|
| 1  | $\exists \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x}))$                  |                           |
| 2  | $a: P(a) \wedge Q(a)$  |                           |
| 4  | $\exists \mathbf{x} P(\mathbf{x})$   |                           |
| 5  | $\exists \mathbf{x} P(\mathbf{x})$   | Elim $\exists$ : 1, 2 - 4 |
| 6  | $a: P(a) \wedge Q(a)$  |                           |
| 8  | $\exists \mathbf{x} Q(\mathbf{x})$   |                           |
| 9  | $\exists \mathbf{x} Q(\mathbf{x})$   | Elim $\exists$ : 1, 6 - 8 |
| 10 | $\exists \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{x} Q(\mathbf{x})$ | Intr $\wedge$ : 5 - 9     |



# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 4:**  $\{ \exists \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x})) \} \vdash_{\text{DN}} \exists \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{x} Q(\mathbf{x})$

- As fórmulas existenciais podem ser obtidas em cada caso por eliminação do disjuncto não relevante e instanciação existencial.
  - Linhas 3 e 7: Eliminam-se as conjunções de 2 e 6
  - Linhas 4 e 8: Introduzem-se os  $\exists$ s pretendidos

|    |  |   |
|----|--|---|
| 1  | $\exists \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x}))$                  |   |
|    | $\mathbf{a}: P(\mathbf{a}) \wedge Q(\mathbf{a})$                           |   |
| 3  | $P(\mathbf{a})$  | <b>Elim <math>\wedge</math> : 2</b>         |
| 4  | $\exists \mathbf{x} P(\mathbf{x})$   | <b>Intr <math>\exists</math> : 3</b>        |
| 5  | $\exists \mathbf{x} P(\mathbf{x})$   | <b>Elim <math>\exists</math> : 1, 2 - 4</b> |
|    | $\mathbf{a}: P(\mathbf{a}) \wedge Q(\mathbf{a})$                           |   |
| 7  | $Q(\mathbf{a})$  | <b>Elim <math>\wedge</math> : 6</b>         |
| 8  | $\exists \mathbf{x} Q(\mathbf{x})$   | <b>Intr <math>\exists</math> : 7</b>        |
| 9  | $\exists \mathbf{x} P(\mathbf{x})$   | <b>Elim <math>\exists</math> : 1, 6 - 8</b> |
| 10 | $\exists \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{x} Q(\mathbf{x})$ | <b>Intr <math>\wedge</math> : 2 - 9</b>     |

# Estratégias de Demonstração

- Por último demonstramos as leis de Morgan de quantificadores (d direcção mais “difícil”)

**Exemplo 5:**  $\{\neg \exists x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \forall x \neg P(x)$

- Apesar de se pretender uma fórmula quantificada universalmente, tentemos fazer uma demonstração por absurdo (na realidade a regra geral conduziria a uma demonstração mais simples; deixa-se como exercício).
  - Linha 2: Assume-se a negação da conclusão
  - Linha 9: Obtém-se o absurdo a fórmula nesse nome em 9
  - Linhas 10 e 11 : Nega-se a hipótese e elimina-se a dupla negação

|    |  |                                 |                            |
|----|--|---------------------------------|----------------------------|
| 1  |  | $\neg \exists x P(x)$           |                            |
| 2  |  |                                 | $\neg \forall x \neg P(x)$ |
|    |  |                                 | ...                        |
| 9  |  |                                 | $\perp$                    |
| 10 |  | $\neg \neg \forall x \neg P(x)$ | Intr $\neg$ : 2 - 9        |
| 11 |  | $\forall x \neg P(x)$           | Elim $\neg$ : 10           |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 5:**  $\{\neg \exists x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \forall x \neg P(x)$

- A contradição pode ser obtida obtendo-se a fórmula contrária à 2. Como a fórmula a obter é universalmente quantificada deve assumir-se um objecto arbitrário,  $c$ , e obter a fórmula nesse objecto.

- Linhas 8 : Estabelece-se como meta a fórmula contrária a 2
- Linhas 3 : Assume-se o objecto  $c$
- Linha 7: Obtém-se a fórmula em  $c$

|    |  |                                 |  |
|----|--|---------------------------------|--|
| 1  |  | $\neg \exists x P(x)$           |  |
| 2  |  | —                               |  |
| 2  |  | $\neg \forall x \neg P(x)$      |  |
| 3  |  |                                 | $c:$   |
| 3  |  |                                 | —  |
| 7  |  |                                 | $\neg P(c)$  |
| 8  |  |                                 | $\forall x \neg P(x)$ <b>Intr <math>\forall</math> : 3 , 7</b> |
| 9  |  |                                 | $\perp$ <b>Intr <math>\perp</math> : 2 , 8</b>                 |
| 10 |  | $\neg \neg \forall x \neg P(x)$ | <b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 9</b>                          |
| 11 |  | $\forall x \neg P(x)$           | <b>Elim <math>\neg</math> : 10</b>                             |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 5:**  $\{\neg \exists x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \forall x \neg P(x)$

- A fórmula que se deve obter é uma negação, podendo ser obtida por absurdo.

- Linha 4: Assume-se a negação de 7
- Linha 6: Estabelece-se como meta a contradição

|    |                            |  |
|----|----------------------------|--|
| 1  | $\neg \exists x P(x)$      |  |
| 2  | $\neg \forall x \neg P(x)$ |  |
| 3  | c:                         |  |
| 4  | $P(c)$                     |  |
| 6  | $\perp$                    |  |
| 7  | $\neg P(c)$                | <b>Intr <math>\neg</math> : 4 - 6</b>    |
| 8  | $\forall x \neg P(x)$      | <b>Intr <math>\forall</math> : 3 , 7</b> |
| 9  | $\perp$                    | <b>Intr <math>\perp</math> : 2 , 8</b>   |
| 10 | $\neg \forall x \neg P(x)$ | <b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 9</b>    |
| 11 | $\forall x \neg P(x)$      | <b>Elim <math>\neg</math> : 10</b>       |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 5:**  $\{\neg \exists x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \forall x \neg P(x)$

- A contradição estabelece-se generalizando-se existencialmente a fórmula 4 e notando que ela é contrária à premissa.
  - Linha 5: Generaliza-se existencialmente 4

|    |                            |                        |
|----|----------------------------|------------------------|
| 1  | $\neg \exists x P(x)$      |                        |
| 2  | $\neg \forall x \neg P(x)$ |                        |
| 3  | c:                         |                        |
| 4  | P(c)                       |                        |
| 5  | $\exists x P(x)$           | Intr $\exists$ : 4     |
| 6  | $\perp$                    | Intr $\perp$ : 1 , 5   |
| 7  | $\neg P(c)$                | Intr $\neg$ : 4 - 6    |
| 8  | $\forall x \neg P(x)$      | Intr $\forall$ : 3 , 7 |
| 9  | $\perp$                    | Intr $\perp$ : 2 , 8   |
| 10 | $\neg \forall x \neg P(x)$ | Intr $\neg$ : 2 - 9    |
| 11 | $\forall x \neg P(x)$      | Elim $\neg$ : 10       |

# Estratégias de Demonstração

- A outra lei de de Morgan obtem-se similarmente

**Exemplo 6:**  $\{\neg \forall x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \exists x \neg P(x)$

- Pretendendo-se uma fórmula quantificada existencialmente, e não havendo qualquer objecto a quem se possam atribuir propriedades pela premissa, a demonstração por deve ser feita por absurdo.

- Linha 2: Assume-se a negação da conclusão
- Linha 10: Obtém-se o absurdo a fórmula nesse nome em 10
- Linhas 11 e 12 : Nega-se a hipótese e elimina-se a dupla negação

|    |                                 |                     |
|----|---------------------------------|---------------------|
| 1  | $\neg \forall x P(x)$           |                     |
| 2  | $\neg \exists x \neg P(x)$      |                     |
|    | ...                             |                     |
| 10 | $\perp$                         |                     |
| 11 | $\neg \neg \exists x \neg P(x)$ | Intr $\neg$ : 2 - 9 |
| 12 | $\exists x \neg P(x)$           | Elim $\neg$ : 10    |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 6:**  $\{\neg \forall x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \exists x \neg P(x)$

- A hipótese 2 indica que todos os objectos são P, o que contradiz a premissa. Assim a contradição obtém-se com a fórmula universalmente quantificada equivalente a 2:
  - Linha 9 : Estabelece-se como meta a fórmula contrária a 1
  - Linha 3 : Assume-se o objecto **c**
  - Linha 8: Obtém-se a fórmula em **c**

|    |                                    |  |
|----|------------------------------------|--|
| 1  | $\neg \forall x P(x)$              |  |
| 2  | $\neg \exists x \neg P(x)$         |  |
| 3  | <b>c</b> :                         |  |
| 8  | <b>P(c)</b>                        |  |
| 9  | <b><math>\forall x P(x)</math></b> | <b>Intr <math>\forall</math> : 3 - 8</b> |
| 10 | $\perp$                            | <b>Intr <math>\perp</math> : 1 - 9</b>   |
| 11 | $\neg \neg \exists x \neg P(x)$    | <b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 10</b>   |
| 12 | $\exists x \neg P(x)$              | <b>Elim <math>\neg</math> : 10</b>       |

# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 6:**  $\{\neg \forall x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \exists x \neg P(x)$

- A meta intermédia 8 pode obter-se por absurdo, já que as hipóteses anteriores apenas estabelecem negações de propriedades.
  - Linhas 4 e 6 : Assume-se a fórmula negada e obtém-se a contradição
  - Linha 7: Obtém-se a fórmula duplamente negada

|    |                                 |  |
|----|---------------------------------|--|
| 1  | $\neg \forall x P(x)$           |  |
| 2  | $\neg \exists x \neg P(x)$      |  |
| 3  | c:                              |  |
| 4  | $\neg P(c)$                     |  |
| 6  | $\perp$                         |  |
| 7  | $\neg \neg P(c)$                | <b>Intr <math>\neg</math> : 4 - 6</b>    |
| 8  | $P(c)$                          | <b>Elim <math>\neg</math> : 7</b>        |
| 9  | $\forall x P(x)$                | <b>Intr <math>\forall</math> : 3 - 8</b> |
| 10 | $\perp$                         | <b>Intr <math>\perp</math> : 1 - 9</b>   |
| 11 | $\neg \neg \exists x \neg P(x)$ | <b>Intr <math>\neg</math> : 2 - 10</b>   |
| 12 | $\exists x \neg P(x)$           | <b>Elim <math>\neg</math> : 10</b>       |



# Estratégias de Demonstração

**Exemplo 6:**  $\{\neg \forall x P(x)\} \vdash_{\text{DN}} \exists x \neg P(x)$

- A contradição estabelece-se entre as fórmulas 2 e 4, uma vez generalizada existencialmente.

- Linha 5: Introduce-se o  $\exists$  em 4

|    |                                |                        |
|----|--------------------------------|------------------------|
| 1  | $\neg \forall x P(x)$          |                        |
| 2  | $\neg \exists x \neg P(x)$     |                        |
| 3  | c:                             |                        |
| 4  | $\neg P(c)$                    |                        |
| 5  | $\exists x \neg P(x)$          | Intr $\exists$ : 4     |
| 6  | $\perp$                        | Intr $\perp$ : 2 , 5   |
| 7  | $\neg\neg P(c)$                | Intr $\neg$ : 4 - 6    |
| 8  | $P(c)$                         | Elim $\neg$ : 7        |
| 9  | $\forall x P(x)$               | Intr $\forall$ : 3 - 8 |
| 10 | $\perp$                        | Intr $\perp$ : 1 - 9   |
| 11 | $\neg\neg \exists x \neg P(x)$ | Intr $\neg$ : 2 - 10   |
| 12 | $\exists x \neg P(x)$          | Elim $\neg$ : 10       |