

# Lógica Computacional

---

Axiomas do Mundo dos Blocos

Algumas Inferências Analíticas

Consistência e completude do sistema DN

# Axiomas do Mundo dos Blocos

---

- A linguagem do mundo dos blocos que temos utilizado, chamemos-lhe Tarski, foi definida com os seguintes símbolos funcionais e predicativos:

$$\text{Tarski} = \langle \text{SF}, \text{SP} \rangle$$

- **SF = SF<sub>0</sub>**
- Constantes: nomes que se podem dar a blocos
  - SF<sub>0</sub> = {a,b,c,d, ...}
- **SP = SP<sub>1</sub> ∪ SP<sub>2</sub> ∪ SP<sub>3</sub>**

Predicados Unários: Propriedades de tamanho e tipo dos blocos.

- SP<sub>1</sub> = { Cube, Tet, Dodec, Small, Medium, Large }
- Predicados Binários: Igualdade e Relações de tamanho, tipo, posição entre blocos
  - SP<sub>2</sub> = { =, Larger, Smaller, SameSize, SameShape, FrontOf, BackOf, SameRow, LeftOf, RightOf, SameCol, Adjoins }
- Predicados Ternários: Bloco entre 2 blocos (os 3 blocos alinhados)
  - SP<sub>3</sub> = { Between },

# Axiomas do Mundo dos Blocos

---

- Se a semântica associada aos predicados for axiomatizada, as inferências correspondentes a consequências analíticas passam a ser consequências lógicas das premissas e dos axiomas de Tarski.

## Axiomas de Forma

- Exclusividade: Não pode haver um bloco com duas formas diferentes

$$\begin{aligned} & \neg \exists \mathbf{x} (\text{Cube}(\mathbf{x}) \wedge \text{Tet}(\mathbf{x})) \\ & \neg \exists \mathbf{x} (\text{Tet}(\mathbf{x}) \wedge \text{Dodec}(\mathbf{x})) \\ & \neg \exists \mathbf{x} (\text{Dodec}(\mathbf{x}) \wedge \text{Cube}(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

- Exaustividade : Apenas existem os três tipos de blocos

$$\forall \mathbf{x} (\text{Tet}(\mathbf{x}) \vee \text{Dodec}(\mathbf{x}) \vee \text{Cube}(\mathbf{x}))$$

- Na linguagem Traski, existe um outro predicado, **SameShape/2**, que tem de ser relacionado com este predicados unários.

# Axiomas do Mundo dos Blocos

## - Introdução de **SameShape/2**

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\mathbf{Tet}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{Tet}(\mathbf{y})) &\rightarrow \mathbf{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ) \\ \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\mathbf{Cube}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{Cube}(\mathbf{y})) &\rightarrow \mathbf{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ) \\ \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\mathbf{Dodec}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{Dodec}(\mathbf{y})) &\rightarrow \mathbf{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) )\end{aligned}$$

## - Eliminação de **SameShape/2**

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\mathbf{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \mathbf{Tet}(\mathbf{x})) &\rightarrow \mathbf{Tet}(\mathbf{y}) ) \\ \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\mathbf{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \mathbf{Cube}(\mathbf{x})) &\rightarrow \mathbf{Cube}(\mathbf{y}) ) \\ \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\mathbf{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \mathbf{Dodec}(\mathbf{x})) &\rightarrow \mathbf{Dodec}(\mathbf{y}) )\end{aligned}$$

- O predicado **SameShape/2** corresponde a uma relação de equivalência, gozando das propriedades *reflexivas, simétrica e transitiva*

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{x} \quad \mathbf{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \\ \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( \mathbf{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{SameShape}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) ) \\ \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\mathbf{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \mathbf{SameShape}(\mathbf{y}, \mathbf{z})) \rightarrow \mathbf{SameShape}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) )\end{aligned}$$

# Axiomas do Mundo dos Blocos

---

- Axiomas semelhantes podem ser definidos para os tamanhos dos cubos.

## Axiomas de Tamanho

- Exclusividade: Não pode haver um bloco com duas tamanhos diferentes

$$\begin{aligned} &\neg \exists x \text{ (Small}(x) \wedge \text{Medium}(x)) \\ &\neg \exists x \text{ (Small}(x) \wedge \text{Large}(x)) \\ &\neg \exists x \text{ (Medium}(x) \wedge \text{Large}(x)) \end{aligned}$$

- Exaustividade : Apenas existem os três tipos de tamanhos

$$\forall x \text{ (Small}(x) \vee \text{Medium}(x) \vee \text{Large}(x))$$

- Na linguagem Tarski, existe um outro predicado, **SameSize/2**, que tem de ser relacionado com estes predicados unários.

# Axiomas do Mundo dos Blocos

---

## - Introdução de **SameSize/2**

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\text{Small}(\mathbf{x}) \wedge \text{Small}(\mathbf{y})) \rightarrow \text{SameSize}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) )$$

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\text{Medium}(\mathbf{x}) \wedge \text{Medium}(\mathbf{y})) \rightarrow \text{SameSize}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) )$$

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\text{Large}(\mathbf{x}) \wedge \text{Large}(\mathbf{y})) \rightarrow \text{SameSize}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) )$$

## - Eliminação de **SameSize/2**

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\text{SameSize}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{Small}(\mathbf{x})) \rightarrow \text{Small}(\mathbf{y}) )$$

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\text{SameSize}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{Medium}(\mathbf{x})) \rightarrow \text{Medium}(\mathbf{y}) )$$

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\text{SameSize}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{Large}(\mathbf{x})) \rightarrow \text{Large}(\mathbf{y}) )$$

- Tal como o predicado **SameShape/2**, também o predicado **SameSize/2** corresponde a uma relação de equivalência, gozando das propriedades **reflexivas**, **simétrica** e **transitiva**

$$\forall \mathbf{x} \quad \text{SameSize}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( \text{SameSize}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \text{SameSize}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) )$$

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\text{SameSize}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{SameSize}(\mathbf{y}, \mathbf{z})) \rightarrow \text{SameSize}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) )$$

# Axiomas do Mundo dos Blocos

---

- No caso dos tamanhos há que considerar igualmente a ordenação dos tamanhos expressa na relação Larger/2 (e Smaller/2).

- Introdução de **Larger/2**

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\text{Medium}(\mathbf{x}) \wedge \text{Small}(\mathbf{y})) \rightarrow \text{Larger}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ) \\ \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\text{Large}(\mathbf{x}) \wedge \text{Small}(\mathbf{y})) \rightarrow \text{Larger}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ) \\ \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\text{Large}(\mathbf{x}) \wedge \text{Medium}(\mathbf{y})) \rightarrow \text{Larger}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) )\end{aligned}$$

- Eliminação de **Larger/2**

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\text{Larger}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow ( (\text{Large}(\mathbf{x}) \wedge \text{Medium}(\mathbf{y})) \\ \vee (\text{Large}(\mathbf{x}) \wedge \text{Small}(\mathbf{y})) \\ \vee (\text{Medium}(\mathbf{x}) \wedge \text{Small}(\mathbf{y})) ) ) )\end{aligned}$$

- Equivalência de Larger/2 e Smaller/2

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} ( (\text{Larger}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leftrightarrow \text{Smaller}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) ) )$$

# Axiomas do Mundo dos Blocos

---

- Para os predicados de posição há que considerar as relações de equivalência estabelecidas pelos predicados **SameRow/2** e **SameCol/2**, com as suas propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

$$\forall \mathbf{x} \quad \text{SameRow}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \quad (\text{SameRow}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \text{SameRow}(\mathbf{y}, \mathbf{x}))$$

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \quad ((\text{SameRow}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{SameRow}(\mathbf{y}, \mathbf{z})) \rightarrow \text{SameRow}(\mathbf{x}, \mathbf{z}))$$

$$\forall \mathbf{x} \quad \text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \quad (\text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \text{SameCol}(\mathbf{y}, \mathbf{x}))$$

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \quad ((\text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{SameCol}(\mathbf{y}, \mathbf{z})) \rightarrow \text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{z}))$$

- Adicionalmente há que estabelecer que dois objectos diferentes não podem ocupar a mesma posição

$$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \quad ((\text{SameCol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \text{SameRow}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y})$$

# Axiomas do Mundo dos Blocos

---

- Os predicados **FrontOf/2**, **BackOf/2** e **SameRow/2** gozam das seguintes propriedades:

- Exclusividade

$$\neg \exists x \exists y (\text{BackOf}(x, y) \wedge \text{SameRow}(x, y))$$

$$\neg \exists x \exists y (\text{BackOf}(x, y) \wedge \text{FrontOf}(x, y))$$

$$\neg \exists x \exists y (\text{SameRow}(x, y) \wedge \text{FrontOf}(x, y))$$

- Exaustividade:

$$\forall x \forall y (\text{BackOf}(x, y) \vee \text{SameRow}(x, y) \vee \text{FrontOf}(y, x))$$

- O predicados **BackOf/2** goza da propriedade *transitiva*.

$$\forall x \forall y ((\text{BackOf}(x, y) \wedge \text{BackOf}(y, z)) \rightarrow \text{BackOf}(x, z))$$

- O predicado **FrontOf/2** é equivalente ao predicado **BackOf/2** com os argumentos trocados.

$$\forall x \forall y (\text{FrontOf}(x, y) \leftrightarrow \text{BackOf}(y, x))$$

# Axiomas do Mundo dos Blocos

---

- Os predicados **RightOf/2**, **LeftOf/2** e **SameCol/2** têm propriedades semelhantes.
- Exclusividade

$$\begin{aligned} & \neg \exists x \exists y (\text{LeftOf}(x, y) \wedge \text{SameCol}(x, y)) \\ & \neg \exists x \exists y (\text{LeftOf}(x, y) \wedge \text{RightOf}(x, y)) \\ & \neg \exists x \exists y (\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{RightOf}(x, y)) \end{aligned}$$

- Exaustividade:

$$\forall x \forall y (\text{LeftOf}(x, y) \vee \text{SameCol}(x, y) \vee \text{RightOf}(y, x))$$

- O predicados **LeftOf/2** goza da propriedade *transitiva*.

$$\forall x \forall y ((\text{LeftOf}(x, y) \wedge \text{LeftOf}(y, z)) \rightarrow \text{LeftOf}(x, z))$$

- O predicado **RightOf/2** é equivalente ao predicado **LeftOf/2** com os argumentos trocados.

$$\forall x \forall y (\text{RightOf}(x, y) \leftrightarrow \text{LeftOf}(y, x))$$

# Axiomas do Mundo dos Blocos

---

- Os predicados **Adjoins/2** e **Between/3** requerem uma representação mais completa sobre o número da linha e da coluna em que se encontra cada objecto.
- Apenas se apresenta abaixo um axioma definidor do predicado **Adjoins/2**

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \text{ (Adjoins}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \leftrightarrow \\ & ((\text{row}(\mathbf{x}) = \text{row}(\mathbf{y}) \wedge \text{col}(\mathbf{x}) = \text{col}(\mathbf{y}) + 1) \vee \\ & (\text{row}(\mathbf{x}) = \text{row}(\mathbf{y}) \wedge \text{col}(\mathbf{x}) + 1 = \text{col}(\mathbf{y})) \vee \\ & (\text{row}(\mathbf{x}) = \text{row}(\mathbf{y}) + 1 \wedge \text{col}(\mathbf{x}) = \text{col}(\mathbf{y})) \vee \\ & (\text{row}(\mathbf{x}) + 1 = \text{row}(\mathbf{y}) \wedge \text{col}(\mathbf{x}) = \text{col}(\mathbf{y}))) \end{aligned}$$

- Esta definição pressupõe que a linguagem Tarski seja estendida, nomeadamente com símbolos funcionais
  - $SF_0$  - A constante 1
  - $SF_1$  - Os símbolos funcionais **row/1** e **col/1**.
  - $SF_2$  - O símbolo funcional **+/2**

para além de alguma axiomatização da aritmética (propriedades da soma)

# Demonstrações "Analíticas"

---

- A partir dos axiomas do Mundo de Blocos podem deduzir-se logicamente algumas propriedades que anteriormente apenas se poderiam obter analiticamente.
- Por exemplo:

$\{ \text{Larger}(a, b), \text{Medium}(b) \} \vdash_{\text{DN}} \text{Large}(a)$

$\{ \text{Tet}(a), \text{Cube}(b) \} \vdash_{\text{DN}} a \neq b$

$\{ \text{Larger}(a, b), \text{Larger}(b, c) \} \vdash_{\text{DN}} \text{Large}(a)$

$\{ \text{Larger}(a, b), \text{Larger}(b, c) \} \vdash_{\text{DN}} \text{Medium}(b)$

$\{ \text{Adjoins}(a, b), \text{LeftOf}(a, b) \} \vdash_{\text{DN}} \text{SameRow}(a, b)$

$\{ \text{Between}(a, b, c), \text{LeftOf}(a, b) \} \vdash_{\text{DN}} \text{RightOf}(a, c)$

No entanto estas demonstrações são bastante "entediantes" como se pode ver no primeiro caso (os outros ficam para exercício)

# Demonstrações "Analíticas"

Exemplo:  $\{ \text{Larger}(a,b) , \text{Medium}(b) \} \models_{\text{DN}} \text{Large}(a)$   
 $(\text{Larger}(a,b) \wedge \text{Medium}(b)) \rightarrow \text{Large}(a)$

1.	$\text{Larger}(a,b) \wedge \text{Medium}(b)$	$\text{Elim } \forall : \text{Axioma}$	$\&$
2.	$\text{Larger}(a,b)$	$\text{Elim } \rightarrow : 2, \text{Axioma}'$	
3.	$(\text{Large}(a) \wedge \text{Medium}(b)) \vee (\text{Medium}(a) \wedge \text{Small}(b)) \vee (\text{Large}(a) \wedge \text{Small}(b))$		
4.	$\text{Large}(a) \wedge \text{Medium}(b)$		
5.	$\text{Large}(a)$		
6.	$\text{Medium}(a) \wedge \text{Small}(b)$		
7.	$\text{Small}(b)$		
8.	$\text{Medium}(b)$		
9.	$\exists x (\text{Small}(x) \wedge \text{Medium}(x))$	$\text{Intr } \exists : " 7 \& 8 "$	
10.	$\perp$	$\text{Intr } \perp : 9, \text{Axioma}$	
11.	$\text{Large}(a)$	$\text{Elim } \perp : 10$	
12.	$\text{Large}(a) \wedge \text{Small}(b)$		
13.	$\text{Large}(a)$		
14.	$\text{Large}(a)$	$\text{Elim } \vee : 3, 4-5, 6-11, 12-13$	

# Métodos de Demonstração com Quantificadores

**Exemplo:** Ordem de Quantificadores 1

$$\exists \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Se existe um bloco junto a todos os blocos, então todos os blocos têm um bloco junto deles!

1.	$\exists \mathbf{x} \forall \mathbf{y} \text{Adjoins}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	
2.	$\mathbf{a}: \forall \mathbf{y} \text{Adjoins}(\mathbf{a}, \mathbf{y})$	
3.	$\mathbf{b}:$	
4.	$\text{Adjoins}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	Elim $\forall$ : 2
5.	$\exists \mathbf{x} \text{Adjoins}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$	Intr $\exists$ : 4
6.	$\forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x} \text{Adjoins}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Intr $\forall$ : 3 - 5
7.	$\forall \mathbf{y} \exists \mathbf{x} \text{Adjoins}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Elim $\exists$ : 1, 2 - 6

- Mas será que existe um bloco “junto a todos os blocos” ?
- Será que esse bloco está junto a si próprio?

# Métodos de Demonstração com Quantificadores

**Exemplo:** Ordem de Quantificadores 2

$$\exists y \forall x \varphi(x, y) \rightarrow \forall x \exists y \varphi(x, y)$$

- O problema não está na demonstração mas sim na premissa que viola os axiomas de posição. A mesma demonstração será válida com um predicado reflexivo, como por exemplo para o predicado `NearOf/2` definido como:

$$\forall x \forall y (\text{NearOf}(x, y) \leftrightarrow (\text{Adjoins}(x, y) \vee x = y))$$

1.	$\exists x \forall y \text{NearOf}(x, y)$	
2.	$a: \forall y \text{NearOf}(a, y)$	
3.	$b:$	
4.	$\text{NearOf}(a, b)$	Elim $\forall: 2$
5.	$\exists x \text{NearOf}(x, b)$	Intr $\exists: 4$
6.	$\forall y \exists x \text{NearOf}(x, y)$	Intr $\forall: 3 - 5$
7.	$\forall y \exists x \text{NearOf}(x, y)$	Elim $\exists: 1, 2 - 6$

# Métodos de Demonstração com Quantificadores

**Exemplo:** Ordem de Quantificadores 3

$$\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \exists \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad ???$$

Se todos os blocos têm um bloco ao pé de si, será que existe um bloco ao pé de todos os blocos?

- Claramente a resposta é não! E no entanto uma demonstração “errada” consegue provar este resultado.

1.	$\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} \text{NearOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	
2.	$\mathbf{a}: \forall \mathbf{x} \text{NearOf}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$	
3.	$\exists \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \text{NearOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Intr $\exists$ : 3
4.	$\exists \mathbf{y} \forall \mathbf{x} \text{NearOf}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Elim $\exists$ : 1, 2 - 3

- O erro está na hipótese utilizada, que atribui um nome a uma variável que está quantificada existencialmente, mas em que o quantificador não é o primeiro da fórmula utilizada!

# Métodos de Demonstração com Quantificadores

## Exemplo: Paradoxo do Barbeiro

Numa aldeia existe um barbeiro que barbeia todas as pessoas que não se barbeiam a si próprios, e apenas essas pessoas.

- Na realidade não pode existir tal situação como se prova na demonstração seguinte:

1.	$\exists x (B(x) \wedge \forall y (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$	
2.	$b: B(b) \wedge \forall y (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(b,y))$	
3.	$\forall y (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(b,y))$	Elim $\wedge$ : 2
4.	$\neg B(b,b) \leftrightarrow B(b,b)$	Elim $\forall$ : 3
5.	$B(b,b)$	
6.	$\neg B(b,b)$	Elim $\leftrightarrow$ : 4,5
7.	$\perp$	Intr $\perp$ : 4,5
8.	$\neg B(b,b)$	Intr $\neg$ : 4,5
9.	$B(b,b)$	Elim $\leftrightarrow$ : 4,8
10.	$\perp$	Intr $\perp$ : 8,9
11.	$\perp$	Elim $\exists$ : 1, 2 - 10
12.	$\neg \exists x (B(x) \wedge \forall y (\neg B(y,y) \leftrightarrow B(x,y)))$	Intr $\neg$ : 1 - 11

# Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

---

- O sistema de Dedução Natural **DN** apresentado contém regras de inferência de introdução e eliminação de operadores e quantificadores nomeadamente

$\wedge$ <b>Conjunção</b>	$\neg$ <b>Negação</b>	$\rightarrow$ <b>Implicação</b>	<b>= Igualdade</b>
$\vee$ <b>Disjunção</b>	$\perp$ <b>Contradição</b>	$\leftrightarrow$ <b>Equivalência</b>	$\forall$ <b>Q. Universal</b>
			$\exists$ <b>Q. Existencial</b>

- Adicionalmente verificamos que o sistema **T**, correspondendo ao sistema **DN** restrito aos 6 operadores iniciais  $\{\wedge, \vee, \neg, \perp, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  é coerente e completo isto é, qualquer fórmula bem formada escrita com esses operadores pode ser demonstrada através das regras do sistema se e apenas se for uma consequência **tautológica** das premissas.

- **Coerência do sistema T:**

- O sistema restrito de dedução natural **T**, é *tautologicamente* coerente.

$$\Phi \vdash_{\mathbf{T}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \models_{\mathbf{T}} \varphi$$

- **Completude do sistema T:**

- O sistema restrito de dedução natural **T**, é *tautologicamente* completo.

$$\Phi \models_{\mathbf{T}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash_{\mathbf{T}} \varphi$$

# Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

---

- As limitações de representação e de regras de demonstração do sistema T garantiam que apenas se poderiam considerar universos (domínios de discurso) finitos.
- Neste contexto, e assumindo que as fórmulas atómicas têm apenas dois valores de verdade possíveis {Verdade, Falso} existem um número finito de valorações para um conjunto de premissas envolvendo  $n$  fórmulas atómicas, mais exactamente  $2^n$ .
- Apesar de este número crescer muito rapidamente com  $n$ ,  $2^n$  é um número finito, e portanto é possível avaliar **em tempo finito** se uma fórmula  $\varphi$  é uma consequência tautológica de um conjunto de premissas  $\Phi$ .
- No caso do sistema de Dedução Natural DN os pressupostos acima já não são válidos. Em particular, fórmulas quantificadas, mesmo que de tamanho finito, podem referir-se a um conjunto infinito de objectos.
- Por exemplo, as fórmulas abaixo definem o conjunto (infinito) de números inteiros
  - **Integer (0)**
  - $\forall x (\text{Integer}(x) \rightarrow \exists y (\text{Integer}(y) \wedge \text{suc}(y, x)))$

# Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

---

- No caso do sistema de Dedução Natural DN os pressupostos acima já não são válidos. Em particular um problema que se coloca é o de saber se será possível verificar em tempo finito se uma fórmula é ou não uma consequência lógica de um conjunto de premissas. “Infelizmente”, tal não é em geral possível.

## Teorema da Incompletude (de Gödel)

Qualquer sistema com um poder de expressão pelo menos igual ao necessário para axiomatizar a aritmética **não é decidível**, isto é, existem fórmulas  $\Phi$  e  $\varphi$  para as quais não é possível determinar, em tempo finito ou infinito, se  $\Phi \models \varphi$ .

- No entanto, em muitos casos de interesse, esta questão pode ser resolvida em tempo finito (caso contrário, a aritmética não podia ter sido desenvolvida !).
- Nestes casos coloca-se a questão de saber se será possível obter demonstrações finitas de uma fórmula  $\varphi$  a partir de um conjunto de premissas  $\Phi$ , sendo estas fórmulas todas FBFs de uma linguagem de primeira ordem.

# Sistema de Dedução Natural: Coerência e Completude

---

- De facto as propriedades de Coerência e Completude podem ser obtidas para o sistema DN de Dedução Natural, contendo as regras de introdução e de eliminação dos operadores

$\wedge$ <b>Conjunção</b>	$\neg$ <b>Negação</b>	$\rightarrow$ <b>Implicação</b>	<b>= Igualdade</b>
$\vee$ <b>Disjunção</b>	$\perp$ <b>Contradição</b>	$\leftrightarrow$ <b>Equivalência</b>	<b><math>\forall</math> Q. Universal</b>
			<b><math>\exists</math> Q. Existencial</b>

O sistema **DN** é **coerente** e **completo** isto é, qualquer fórmula bem formada escrita com esses operadores pode ser demonstrada através das regras do sistema se e apenas se for uma consequência **lógica** (FO) das premissas.

## Coerência do sistema DN:

- O sistema restrito de dedução natural DN, é coerente logicamente (FO).

$$\Phi \vdash_{\text{DN}} \varphi \implies \Phi \models_{\text{FO}} \varphi$$

## Completude do sistema DN:

- O sistema restrito de dedução natural DN, é completo logicamente (FO).

$$\Phi \models_{\text{FO}} \varphi \implies \Phi \vdash_{\text{DN}} \varphi$$