Lógica Computacional

Consequência Tautológica e Lógica em Frases Quantificadas

Leis de de Morgan

Separação de Quantificadores

Consequências Analíticas e Método Axiomático

Frases Quantificadas

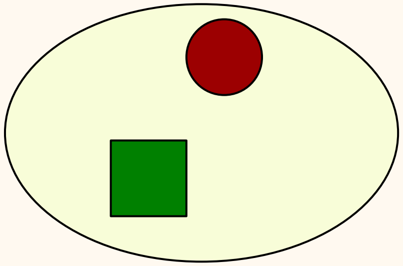
- O significado de uma frase quantificada, e das correspondentes Fórmulas Bem Formadas (FBFs), depende do quantificador utilizado. Consequentemente, o tipo de quantificadores utilizados é muito importante para as inferências que podem ser feitas:

$\forall x\ (\mathbf{Ball}(x) \rightarrow \mathbf{Light}(x))$	Todas as bolas são leves
$\forall x\ \mathbf{Ball}(x)$	Todos os objectos são bolas
$\therefore\ \forall x\ \mathbf{Light}(x)$	Logo, todos os objectos são leves.

- Mas um argumento com forma semelhante mas diferentes quantificadores é bastante "estranho", a começar pelo significado da primeira fórmula

$\exists x\ (\mathbf{Ball}(x) \rightarrow \mathbf{Light}\ (x))$	Existe um objecto que se for bola é leve
$\exists x\ \mathbf{Ball}(x)$	Alguns objectos são bolas
$\therefore\ \exists x\ \mathbf{Light}(x)$	Logo, alguns objectos são leves

- Pior, o argumento **não é válido**. Consideremos um universo com um cubo **c** e uma bola **b**, ambos pesados. Nesse domínio de discurso,
    - a primeira premissa é verdadeira : o cubo c não é bola...
    - a segunda premissa também: existe a bola b.



... e no entanto

não existe nenhum objecto leve!

Consequência Lógica e Tautológica

- Tal como no caso proposicional, distinguimos os diferentes tipos de consequência tautológica, lógica e analítica (embora, como veremos adiante, esta última possa ser evitada). Assim para a avaliação do valor de verdade de uma Fórmula Bem Formada (FBF) da linguagem de 1ª ordem utilizada

Consequência Tautológica (TT):

- Apenas se considera a aplicação dos operadores Booleanos às FBFs quantificadas mais simples que a compõem, não se considerando qualquer conhecimento adicional sobre o significado dos predicados da assinatura utilizada.

Consequência Lógica (FO):

- Considera-se igualmente o significado dos quantificadores universal e existencial e do predicado de igualdade, mas não o significado dos outros predicados da assinatura utilizada.

Consequência Analítica (TW):

- Considera-se adicionalmente todo o conhecimento existente sobre o significado dos predicados da assinatura, nomeadamente das suas inter-relações.

Consequência Lógica e Tautológica

Exemplos:

$\{\forall x$ Cube(x)$\}$ |= Cube(b)

- A conclusão é consequência FO e TW das premissas, mas não TT, pois a avaliação do validade do argumento requer a compreensão do significado do $\forall$.

$\{\forall x$ Cube(x) $\wedge$ $\forall x$ Small (x)$\}$ |= $\forall x$ Cube(x)

- A conclusão não só é consequência FO e TW das premissas, mas também TT, pois apenas é necessário retirar as consequências do operador Booleano $\wedge$.

$\{$Cube(b)$\}$ |= $\exists x$ Cube(x)

- A validade do argumento requer a compreensão do significado do $\exists$, pelo que a conclusão é uma consequência FO e TW mas não TT.

$\{\forall x$ (Cube(x) $\rightarrow$ Small(x)), Cube(b)$\}$|= $\neg$ Large(b)

- A validade do argumento requer não só a compreensão do significado do $\forall$, mas também das relações entre os predicados Large/1 e Small/1, pelo que a conclusão é uma consequência TW mas não TT nem FO.

Consequência Lógica e Tautológica

- Para validar argumentos a nível tautológico, lógico ou analítico, pode utilizar-se uma técnica semelhante à que se usou no caso da lógica proposicional, substituindo as fórmulas iniciais da seguinte forma:

Consequência Tautológica (TT):

- Substituir univocamente todas as fórmulas fechadas "mínimas" por símbolos proposicionais (fórmulas idênticas são substituídas por símbolos idênticos).

Consequência Lógica (FO):

- Substituir univocamente todos os símbolos predicativos por símbolos "sem significado", por exemplo letras maiúsculas eventualmente seguidas de algarismos.

Consequência Analítica (TW):

- Manter as fórmulas iniciais e usar o conhecimento sobre os predicados utilizados

Exemplo 1 : `{ ∀x Cube(x) } |= Cube(b)`

(TW)	$\{\forall x\ (\mathrm{Cube}(x))\} \models_{TW} \mathrm{Cube}(b)$	✓
(FO)	$\{\forall x\ (C(x))\} \models_{FO} C(b)$	✓
(TT)	$\{C1\} \models_{TT} C2$	✗

Consequência Lógica e Tautológica

Exemplo 2: $\{\forall x\ Cube(x) \wedge \forall x\ Small\ (x)\} \models \forall x\ Cube(x)$

- (TW) $\{\forall x\ Cube(x) \wedge \forall x\ Small(x)\} \models_{TW} \forall x\ Cube(x)$ ✓
- (FO) $\{\forall x\ C(x) \wedge \forall x\ S(x)\} \models_{FO} \forall x\ C(x)$ ✓
- (TT) $\{ C \wedge S\} \models_{TT} C$ ✓

Exemplo 3: $\{ Cube(b) \} \models \exists x\ Cube(x)$

- (TW) $\{ Cube(b) \} \models_{TW} \exists x\ Cube(x)$ ✓
- (FO) $\{ C(b) \} \models_{FO} \exists x\ C(x)$ ✓
- (TT) $\{ C1 \} \models_{TT} C2$ ✗

Exemplo 4: $\{\forall x\ (Cube(x) \rightarrow Small(x)),\ Cube(b) \} \models_{TW} \neg\ Large(b)$

- (TW) $\{ \forall x\ (Cube(x) \rightarrow Small(x)),\ Cube(b) \} \models_{TW} \neg\ Large(b)$ ✓
- (FO) $\{ \forall x\ (C(x) \rightarrow S(x)),\ C(b\} \} \models_{FO} \neg\ L(b)$ ✗
- (TT) $\{ C,\ B \} \} \models_{TT} \neg\ L$ ✗

Exemplo 5: $\{\forall x\ (Cube(x) \rightarrow Small(x)),\ Tet(b) \} \models Small(b)$

- (TW) $\{ \forall x\ (Cube(x) \rightarrow Small(x)),\ Tet(b) \} \models_{TW} Small(b)$ ✗
- (FO) $\{ \forall x\ (C(x) \rightarrow S(x)),\ T(b\} \} \models_{FO} S(b)$ ✗
- (TT) $\{ C,\ B \} \} \models_{TT} S$ ✗

Quantificação e Operadores Booleanos

- Existe uma analogia entre os quantificadores universal e existencial e os operadores Booleanos de conjunção e disjunção. Em alguns casos mais simples, por exemplo quando o número de objectos que se podem **nomear** é finito a quantificação pode ser totalmente evitada tendo em atenção esta analogia.

- Por exemplo, se se puderem nomear apenas **n** objectos, que denotaremos por $\mathbf{a_i}$, com $(1 \leq i \leq n)$, temos as sequintes analogias:

  - A quantificação **universal** pode ser substituída por uma **conjunção**: Se todo o objecto tem a propriedade **P** então o objecto $\mathbf{a_1}$ tem esse propriedade **e** o objecto $\mathbf{a_2}$ tem esse propriedade **e** ...

$$\forall x\ P(x) \quad \Leftrightarrow \quad P(a_1) \land P(a_2) \land \ldots \land P(a_n)$$

  - A quantificação **existencial** pode ser substituída por uma **disjunção**: Se algum objecto tem a propriedade **P** então o objecto $\mathbf{a_1}$ tem esse propriedade **ou** o objecto $\mathbf{a_2}$ tem esse propriedade **ou** ...

$$\exists x\ P(x) \quad \Leftrightarrow \quad P(a_1) \lor P(a_2) \lor \ldots \lor P(a_n)$$

- Estas analogias podem ser estendidas para fórmulas arbitrariamente complexas e com qualquer número de quantificadores, desde que o domínio de discurso seja finito.

Quantificação e Operadores Booleanos

- Obviamente a correspondência tem limites. Por exemplo, se o número de objectos do domínio de discurso for infinito, então as equivalências anteriores envolvem conjunções e disjunções com um número infinito de termos, o que não é aceitável na nossa linguagem.

$$\forall x\ P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \land P(a_2) \land \ldots \land P(a_n) \land \ldots$$
$$\exists x\ P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \lor P(a_2) \lor \ldots \lor P(a_n) \lor \ldots$$

- Note-se que uma linguagem com um número finito de símbolos, mas sem quantificadores, não pode **predicar** um número infinito e arbitrário de objectos, embora possa **denotar** conjuntos infinitos de objectos, se na assinatura Σ utilizada, existir uma constante, digamos $SF_0 = \{ a \}$, e símbolos funcionais de aridade superior a 0.

- Por exemplo, com o símbolo funcional f/1, (i.e. de aridade 1, $f \in SF_1$), poderemos denotar um conjunto **arbitrariamente** grande de objectos

$$\{a,\ f(a),\ f(f(a)),\ \ldots\ \}$$

- Mas a quantificação de fórmulas permite ir mais além destes casos e especificar propriedades para **conjuntos infinitos arbitrários** em **fórmulas finitas**, como no exemplo abaixo (cujo domínio é o conjunto **infinito** dos números inteiros):

$$\forall x\ (Integer(x) \rightarrow \exists y\ (Prime(y) \land Divides(y,x)))$$

Leis de de Morgan para Quantificadores

- Dada a analogia entre os quantificadores universal e existencial e os operadores Booleanos, as leis de de Morgan que relacionam a negação com a disjunção e a conjunção podem ser generalizadas para as fórmulas quantificadas.

- Com efeito, usando e estendendo essa analogia, das leis de de Morgan proposicionais

$$\neg(P(a) \wedge P(b)) \Leftrightarrow_{TT} \neg P(a) \vee \neg P(b)$$

$$\neg(P(a) \vee P(b)) \Leftrightarrow_{TT} \neg P(a) \wedge \neg P(b)$$

  podem obter-se as leis de Morgan para quantificadores:

$$\neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow_{FO} \exists x\ \neg P(x)$$

$$\neg\exists x\ P(x) \Leftrightarrow_{FO} \forall x\ \neg P(x)$$

- Naturalmente estas leis devem ser demonstradas formalmente, não bastando apelar a uma qualquer analogia para o fazer. Mas isso pode ser feito através da semântica estabelecida para a lógica de predicados e em particular para as fórmulas quantificadas, que como vimos é baseada na noção de satisfação.

- A primeira destas equivalências FO é demonstrada de seguida (a outra demonstração será semelhante).

Leis de de Morgan para Quantificadores

(⇒) $\neg\forall x\ P(x)\ \models_{FO}\ \exists x\ \neg P(x)$

- Para demonstrar esta consequência FO, consideremos um domínio, possivelmente infinito, com objectos $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ... Neste domínio, a fórmula $\neg\forall x\ P(x)$ especifica que

"**É falso** que P(x) seja satisfeita para **todo e qualquer** objecto do domínio a_1 **e** a_2 **e**...." .

Nestas condições, é claro que

"Um dos objectos do domínio (a_1 **ou** a_2 ou...) não satisfaz P(x)"

que se representa por $\exists x\ \neg P(x)$.

(⇐) $\exists x\ \neg P(x)\ \models_{FO}\ \neg\forall x\ P(x)$

- Correspondentemente a fórmula $\exists x\ \neg P(x)$ especifica que

"Um dos objectos do domínio (a_1 **ou** a_2 **ou**...) não satisfaz P(x)"

de que se pode concluir que

"**É falso** que P(x) seja satisfeita para **todo e qualquer** objecto do domínio a_1 **e** a_2 e...." que se representa por $\neg\forall x\ P(x)$.

Separação de Quantificadores

- Outras consequências (e equivalências) lógicas podem ser facilmente estabelecidas entre fórmulas muito semelhantes mas em que "distribui" um quantificador pelos vários termos de uma conjunção ou disjunção

- Assim temos as seguintes equivalências lógicas :

$$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow_{FO} \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$$
$$\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow_{FO} \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$$

- Mas trocando-se os quantificadores apenas se obtêm consequências lógicas num dos sentidos

$$\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \ {}_{FO}\!\Leftarrow \forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$$
$$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow_{FO} \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$$

- Como anteriormente, estas equivalências têm de ser demonstradas. Por exemplo, a primeira equivalência-FO pode ser demonstrada como segue (a segunda é similar):

  Quando todos os objectos satisfazem as propriedades P e Q, cada um deles satisfaz a propriedade P e a propriedade Q. Reciprocamente, se cada um dos objectos satisfaz a propriedade P e a propriedade Q, então cada um dos objectos satisfaz as duas propriedades.

Separação de Quantificadores

$$\forall x\ (P(x) \lor Q(x))\ {}_{FO}\Leftarrow\ \forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x)$$

- A consequência-FO pode ser demonstrada de forma semelhante:

$$\forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x)\ \models_{FO} \forall x\ (P(x) \lor Q(x))$$

Claramente se no domínio do discurso todos os objectos satisfazem a propriedade P **ou** todos os objectos satisfazem a propriedade Q então todos os objectos satisfazem pelo menos uma das propriedades.

- Mais interessante é mostrar o caso das "não consequências-FO".

$$\forall x\ (P(x) \lor Q(x))\ \not\models\ \forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x)$$

Mesmo se no domínio de discurso todos os objectos satisfazem a propriedade P **ou** a propriedade Q, pode haver um objecto **a** que satisfaz a propriedade P mas não a Q, e um objecto **b** que satisfaz a propriedade Q mas não a P.

Neste caso a fórmula $\forall x\ (P(x) \lor Q(x))$ será verdadeira, mas a fórmula $\forall x\ P(x)$ é falsa (***b*** *não satisfaz* ***P***) e a fórmula $\forall x\ Q(x)$ também é falsa (***a*** *não satisfaz* ***Q***). Assim a sua disjunção será igualmente falsa, o que invalida a consequência-FO .

Separação de Quantificadores

- As regras de formação de fórmulas bem formadas permitem a quantificação nula, ou seja a quantificação para a variável **x** de uma fórmula em que **x** não ocorre livre, como por exemplo na fórmula $\forall \mathbf{x}\ \mathbf{P(b)}$. Apesar de "estranhas" estas fórmulas têm um significado claro.

- Se para qualquer objecto **x** temos que o objecto **b** satisfaz da propriedade **P** então tal traduz simplesmente o facto que **b** satisfaz a propriedade P. Portanto, se a variável **x** não ocorrer livre na fórmula φ, temos a seguinte equivalência-FO

$$\forall \mathbf{x}\ \varphi \Leftrightarrow_{FO} \varphi$$

- Nesta situação, a separação de quantificadores analisada anteriormente torna-se mais forte, obtendo-se equivalências em todos os casos.

$$\forall \mathbf{x}\ (\varphi \wedge \psi(\mathbf{x})) \Leftrightarrow_{FO} \forall \mathbf{x}\ \varphi \wedge \forall \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})$$
$$\exists \mathbf{x}\ (\varphi \vee \psi(\mathbf{x})) \Leftrightarrow_{FO} \exists \mathbf{x}\ \varphi \vee \exists \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})$$
$$\forall \mathbf{x}\ (\varphi \vee \psi(\mathbf{x})) \Leftrightarrow_{FO} \forall \mathbf{x}\ \varphi \vee \forall \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})$$
$$\exists \mathbf{x}\ (\varphi \wedge \psi(\mathbf{x})) \Leftrightarrow_{FO} \exists \mathbf{x}\ \varphi \wedge \exists \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})$$

Separação de Quantificadores

$$\forall \mathbf{x}\ (\varphi \vee \psi(\mathbf{x})) \Leftrightarrow_{FO} \forall \mathbf{x}\ \varphi \vee \forall \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x}) \Leftrightarrow_{FO} \varphi \vee \forall \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})$$

- Para o mostrar (a demonstração formal deixa-se para exercício) podemos notar que a fórmula $\forall \mathbf{x}\ (\varphi \vee \psi(\mathbf{x}))$, corresponde num domínio com objectos $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots\}$ a

$$(\varphi \vee \psi(\mathbf{a}_1)) \wedge (\varphi \vee \psi(\mathbf{a}_2)) \wedge \ldots$$

- Como a variável **x** não ocorre (livre) em φ, pode usar-se a propriedade distributiva para obter a forma equivalente

$$\varphi \vee (\psi(\mathbf{a}_1) \wedge \psi(\mathbf{a}_2) \wedge \ldots).$$

- Usando o resultado para a quantificação nula temos que

$$\varphi \Leftrightarrow_{FO} \forall \mathbf{x}\ \varphi$$ e ainda que

$$(\psi(\mathbf{a}_1) \wedge \psi(\mathbf{a}_2) \wedge \ldots) \Leftrightarrow_{FO} \forall \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})$$

pelo que

$$\forall \mathbf{x}\ (\varphi \vee \psi(\mathbf{x})) \Leftrightarrow_{FO} \forall \mathbf{x}\ \varphi \vee \forall \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})$$

- A segunda equivalência poderia ser analisada de uma forma semelhante.

$$\exists \mathbf{x}\ (\varphi \wedge \psi(\mathbf{x})) \Leftrightarrow_{FO} \exists \mathbf{x}\ \varphi \wedge \exists \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x}) \Leftrightarrow_{FO} \varphi \wedge \exists \mathbf{x}\ \psi(\mathbf{x})$$

Consequências Analítica

- Na lógica de predicados não é muito comum a exploração da noção de consequência tautológica, já que geralmente estamos interessados em fórmulas quantificadas (de que só em casos muito raros se obtêm inferências “interessantes” quando fórmulas quantificadas completas são abstraídas em símbolos proposicionais).

- Já a exploração de consequências analíticas é muito comum na lógica de predicados, como nos exemplos seguintes. Por exemplo, os argumentos seguintes são válidos

analíticamente	mas não logicamente
∀x (Cube(x) → Small(x)) Cube(a) ———————— **TW** ¬ Large(a)	∀x (C(x) → S(x)) C(a) ———————— **FO ??** ¬ L(a)
∀x (Cube(x) → Small(x)) ∀x (Tet(x) → Small(x)) Large(b) ———————— **TW** Dodec (b)	∀x (C(x) → S(x)) ∀x (T(x) → S(x)) L(b) ———————— **FO ??** D(b)

Consequências Analítica

- Se os argumentos são válidos **analiticamente**, é porque na sua validação é feita uma **análise** do conhecimento existente sobre o mundo dos blocos.

$$
\begin{array}{l}
\forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Small}(x)) \\
\mathrm{Cube}(a) \\
\hline
\neg\ \mathrm{Large}(a)
\end{array}
\quad \mathbf{TW}
$$

- No primeiro caso, é sabido que um objecto **não pode ser simultaneamente grande e pequeno**. Logo se o cubo **a** é pequeno (os cubos são pequenos) não pode ser grande.

$$
\begin{array}{l}
\forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Small}(x)) \\
\forall x\ (\ \mathrm{Tet}(x) \rightarrow \mathrm{Small}(x)) \\
\mathrm{Large}(b) \\
\hline
\mathrm{Dodec}\ (b)
\end{array}
\quad \mathbf{TW}
$$

- No segundo caso, é sabido que os objectos **só podem ser de 3 tipos: tetraedros, cubos ou dodecaedros**. Não sendo **b** um objecto pequeno (por ser grande) , então ele não pode ser nem cubo nem tetraedro. Logo **b** tem de ser dodecaedro.

Consequências Analítica

- Mas este conhecimento implicito sobre o mundo dos blocos pode ser **axiomatizado**. Assim podemos considerar os seguintes axiomas sobre a forma e sobre o tamanho de objectos do mundo dos blocos.

- Axiomas de Forma

F1. $\forall$**x** $\neg$**(Tet(x) $\wedge$ Cube(x))**
F2. $\forall$**x** $\neg$**(Tet(x) $\wedge$ Dodec(x))**
F3. $\forall$**x** $\neg$**(Cube(x) $\wedge$ Dodec(x))**

Exclusividade

F4. $\forall$**x (Tet(x) $\vee$ Cube(x) $\vee$ Dodec(x))** Exaustividade

- Axiomas de Tamanho

T1. $\forall$**x** $\neg$**(Small(x) $\wedge$ Medium(x))**
T2. $\forall$**x** $\neg$**(Small(x) $\wedge$ Large(x))**
T3. $\forall$**x** $\neg$**(Medium(x) $\wedge$ Large(x))**

Exclusividade

T4. $\forall$**x (Small(x) $\vee$ Medium(x) $\vee$ Large(x))** Exaustividade

Consequências Analítica

- Introduzindo os axiomas (relevantes) como premissas dos argumentos estes tornam-se válidos logicamente:

∀x (Cube(x) → Small(x))	
Cube(a)	
¬ Large(a)	TW

T2. ∀x ¬ (S(x) ∧ L(x))	
∀x (C(x) → S(x))	
C(a)	
¬ L(a)	FO

∀x (Cube(x) → Small(x))	
∀x (Tet(x) → Small(x))	
Large(b)	
Dodec (b)	TW

F4. ∀x (T(x) ∨ C(x) ∨ D(x))	
T2. ∀x ¬ (S(x) ∧ L(x))	
∀x (C(x) → S(x))	
∀x (T(x) → S(x))	
L(b)	
D(b)	FO

- Esta técnica permite raciocinar logicamente sobre um domínio de discurso, desde que se explicitem todos os axiomas que especificam as propriedades do domínio.

- Esta foi a técnica iniciada pelos gregos antigos e de que o exemplo mais significativo foi a axiomatização da geometria euclidiana, no livro "Elementos de Geometria" de Euclides no século III a.c.