

Lógica Computacional

Frases Quantificadas

Quantificadores e Variáveis

Fórmulas Bem Formadas: Sintaxe e Semântica

Formas Aristotélicas

Frases Quantificadas

- Existem várias formas utilizadas em linguagem natural para **predicar** (i.e. atribuir propriedades a) **conjuntos** de objectos tais como:

Todas as bolas são leves

Algumas bolas são leves

Quase todas as bolas são leves

Um **poucas** bolas são leves

Quatro bolas são leves

Nenhuma bola é leve

- Estas frases que descrevem conhecimento sobre “quantidades” de objectos pertencentes a esses conjuntos são conhecidas como frases **quantificadas**.
- Obviamente, a validade de argumentos usando frases quantificadas depende do seu tipo, como se pode verificar facilmente

Todas as bolas são leves

Isto é uma bola

Logo, esta bola é leve (!)

Quase todas as bolas são leves

Isto é uma bola

Logo, esta bola é leve (?)

Fórmulas Quantificadas

- Para representar (algumas de) estas frases quantificadas, temos de estender as fórmulas permitidas na linguagem de primeira ordem.
- Como vimos fórmulas atómicas permitem atribuir propriedades ou relações a objectos bem determinados:
 - **Ball(b)** representa a propriedade “ser bola” do objecto b,
 - **Neighbours(a,b)** representa uma relação de “vizinhança” entre os objectos a e b.
- Em lógica de predicados essas propriedades podem ser atribuídas a objectos genéricos ou indeterminados, através do uso de variáveis (denotadas por letras do final do alfabeto, x, y, z, ...):
 - **Ball(x)** atribui a propriedade “ser bola” a um objecto x indeterminado,
 - **Neighbours(x,y)** atribui uma “vizinhança” entre objectos indeterminados x e y.
- De notar que, sendo indeterminados os objectos denotados por variáveis, os predicados com variáveis não representam proposições (frases) completas, mas sim “componentes” a completar através da definição dos objectos referidos.

Fórmulas Quantificadas

- Mais especificamente, se a fórmula **Ball(b)** se pode traduzir pela frase: “O objecto b é uma bola”, a fórmula **Ball(x)** não pode ser traduzida numa frase completa de língua natural pois o objecto x não está determinado, sendo necessária a sua **quantificação**.
- A quantificação em lógica de predicados de 1ª ordem é feita através de dois quantificadores:
 - O **quantificador universal** (\forall) permite especificar que o objecto indeterminado representa todo e qualquer objecto dum universo do discurso.
 $\forall x (\text{Ball}(x))$ – Todos os objectos (do universo considerado) são bolas
 - O **quantificador existencial** (\exists) especifica que o objecto indeterminado representa algum (pelo menos um) dos objectos do universo do discurso, sem o(s) identificar.
 $\exists x (\text{Ball}(x))$ – Existe (pelo menos) um objecto (no universo considerado) que é uma bola
- De notar que à partida se assume à partida um determinado universo, isto é os objectos que podem ser referidos pelas variáveis é restrito a esse conjunto (finito ou infinito): o “domínio do discurso”.

Fórmulas Bem Formadas

- Antes de analisar exemplos de frases quantificadas vamos definir rigorosamente a sintaxe e a semântica da linguagem que vamos utilizar, nomeadamente das fórmulas quantificadas.
- Dada uma assinatura $\Sigma = \langle \mathbf{SP}, \mathbf{SF} \rangle$ em que \mathbf{SP} denota o conjunto dos símbolos de predicados e \mathbf{SF} o conjunto de símbolos funcionais (incluindo constantes), e um conjunto de variáveis $\mathbf{X} = \{x, y, z, \dots\}$.
 - $\mathbf{SP} = \mathbf{SP}_0 \cup \mathbf{SP}_1 \cup \mathbf{SP}_2 \dots$ em que \mathbf{SP}_n é o conjunto de símbolos predicativos (“predicados”) n -ários (assume-se que $\perp \in \mathbf{SP}_0$ e que $= \in \mathbf{SP}_2$).
 - $\mathbf{SF} = \mathbf{SF}_0 \cup \mathbf{SF}_1 \cup \mathbf{SF}_2 \dots$ em que \mathbf{SF}_k é o conjunto de símbolos funcionais (“funções”) n -ários, sendo os elementos de \mathbf{SF}_0 geralmente referidos como nomes ou constantes.

1. Objectos da Assinatura Σ

O conjunto de objectos que podem ser denotados com uma assinatura Σ é definido indutivamente como *o menor conjunto* que inclui:

1. Variáveis e constantes de Σ (i.e. elementos de \mathbf{SF}_0).
2. Funções de \mathbf{SF}_k ($k > 1$) em que os seus k argumentos denotam objectos de Σ .

Fórmulas Bem Formadas

- Podemos agora estender a definição indutiva de fórmulas bem formadas (FBFs) feita para a lógica proposicional para a assinatura $\Sigma = \langle \mathbf{SP}, \mathbf{SF} \rangle$ e variáveis $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots\}$.

Fórmulas bem Formadas (FBFs)

- As fórmulas bem formadas que se podem obter da assinatura Σ são definidas indutivamente como o *menor conjunto* que inclua:

1. **Fórmulas Atômicas:** constituídas por símbolos de \mathbf{SP}_k cujos k argumentos sejam objectos de Σ .

2. **Fórmulas Booleanas:** Se φ e ψ forem FBFs são igualmente FBFs as fórmulas

$$\neg(\varphi) \quad , \quad (\varphi) \wedge (\psi) \quad , \quad (\varphi) \vee (\psi) \quad , \quad (\varphi) \rightarrow (\psi) \quad \text{e} \quad (\varphi) \leftrightarrow (\psi)$$

3. **Fórmulas Quantificadas:** Se v for uma variável e φ uma FBF, são FBFs

$$\forall v (\varphi) \quad \text{e} \quad \exists v (\varphi)$$

Nota: Sempre que bem definidas as regras de precedência, alguns parênteses podem eliminar-se.

Apesar de “bem-formadas”, nem todas as FBFs correspondem a frases de língua natural nomeadamente quando incluem variáveis **livres**.

Fórmulas Bem Formadas e Variáveis Livres

- A situação das variáveis livres pode ser analisada através de alguns exemplos. Uma FBF atômica sem variáveis corresponde a uma frase na língua natural: Por exemplo,
 - **Ball(b)**, corresponde à frase “o objecto b é uma bola”.
- Uma FBF contendo variáveis não quantificadas, não corresponde a uma frase completa de língua natural e *por si só não tem significado*. A FBF só adquire significado e corresponde a uma frase de língua natural quando a variável é quantificada.
 - **Ball(x)** , não corresponde a qualquer frase e não tem significado.
 - $\forall x$ (**Ball(x)**) , corresponde à frase “Todos os objectos são bolas”.
 - $\exists x$ (**Ball(x)**) , corresponde à frase “Alguns objectos são bolas”.
- Uma variável não quantificada diz-se **livre**. Quando é quantificada a variável diz-se **ligada**. Numa fórmula podem coexistir variáveis livres e ligadas.
 - $\forall x$ (**Neighbours(x,y)**) , não corresponde a qualquer frase, pois a variável y está livre.
 - $\forall x$ (**Neighbours(x,b)**) , corresponde à frase “Todos os objectos são vizinhos de b”.
 - $\forall x \exists y$ (**Neighbours(x,y)**) , corresponde à frase “Todos os objectos são vizinhos de algum objecto”.

Semântica de Fórmulas Bem Formadas

- Em geral denotaremos por $\varphi(\mathbf{x})$ uma FBF em que a variável \mathbf{x} ocorra livre. Nestas condições as fórmulas $\forall \mathbf{x} (\varphi(\mathbf{x}))$ e $\exists \mathbf{x} (\varphi(\mathbf{x}))$ **ligam** a variável \mathbf{x} ao respectivo quantificador e emprestam significado à fórmula.
- Uma FBF diz-se **fechada** se todas as suas variáveis estão ligadas. Caso contrário diz-se **aberta**.
- Generalizando o caso proposicional, pretendemos atribuir o valor de Verdade ou Falso a uma FBF fechada, já que as fórmulas abertas não correspondem a frases completas de língua natural e não podem ser avaliadas como verdadeiras ou falsas.
- No entanto, no caso da lógica de predicados deparamo-nos com um problema que não existia na lógica proposicional. Nesta poderíamos obter o valor de verdade de uma FBF a partir do valor de verdade das suas componentes e assim bastava definir uma valoração das suas fórmulas atômicas (por exemplo $P \vee Q$ seria verdade se P ou Q o fossem).
- No caso da lógica de predicados as componentes podem não ter significado, como por exemplo na fórmula $\forall \mathbf{x} (\mathbf{Ball}(\mathbf{x}))$ em que nem a componente de quantificação $\forall \mathbf{x}$, nem a fórmula aberta **Ball(x)**, têm significado!

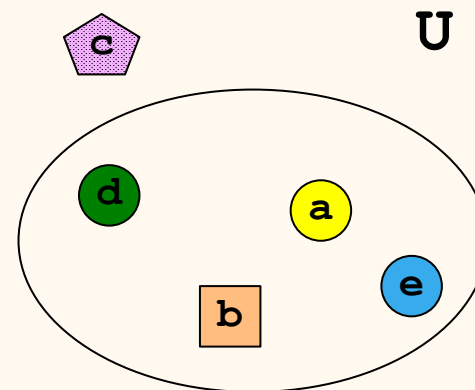
Semântica de Fórmulas Bem Formadas

- Assim sendo o significado de fórmulas quantificadas vai ser obtido a partir da noção de **satisfação** para objectos pertencentes a um domínio de discurso
- Uma fórmula aberta, é **satisfeita** por determinados objectos do domínio de discurso, se é verdadeira quando as suas variáveis são substituídas por esses objectos.
- Uma fórmula $\forall x (\varphi(x))$ é **verdadeira** se a fórmula aberta $\varphi(x)$ é satisfeita para **todos** os objectos *do domínio de discurso*.
- Uma fórmula $\exists x (\varphi(x))$ é **verdadeira** se a fórmula aberta $\varphi(x)$ é satisfeita para **alguns** (pelo menos um) objectos do *domínio de discurso*.

Exemplos

No universo **U**, ao lado temos:

- $\forall x \text{Ball}(x) = \text{F}$ (**Ball** (**x**) não é satisfeita para $x = b$)
- $\exists x \text{Cube}(x) = \text{V}$ (**Cube** (**x**) é satisfeita para $x = b$)
- $\exists x \text{Dodec}(x) = \text{F}$ (**c** não pertence ao domínio de discurso)

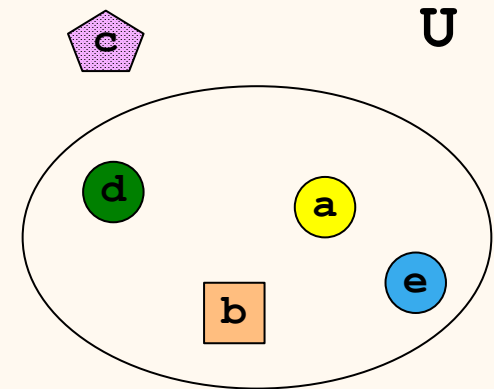


Semântica de Fórmulas Bem Formadas

- A significado de fórmulas compostas por fórmulas fechadas segue as mesmas regras do caso proposicional (e.g. a conjunção de fórmulas é verdadeira se ambas o forem).
- É necessário no entanto ter cuidado com o **alcance (escopo)** dos quantificadores. Por exemplo, no universo U , a fórmula

$$\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Green}(x))$$

é **falsa** pois não existe nenhum objecto que torne verdadeira a fórmula $\text{Cube}(x) \wedge \text{Green}(x)$, i.e. nenhum objecto, é um cubo verde.



- No entanto tal não é o caso da fórmula

$$\exists x \text{Cube}(x) \wedge \exists x \text{Green}(x)$$

em que existem dois quantificadores, referindo variáveis que têm o mesmo nome mas em contextos (escopos) diferentes:

$$\exists x \text{Cube}(x) ; e$$

$$\exists x \text{Green}(x)$$

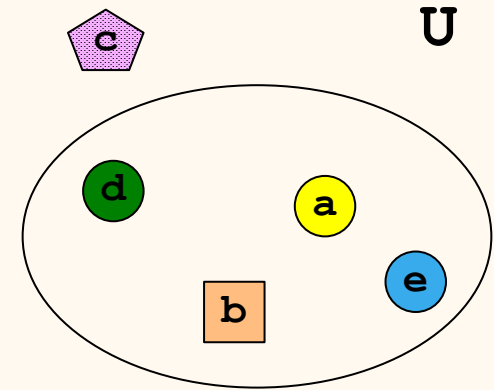
Semântica de Fórmulas Bem Formadas

- A importância dos escopo dos quantificadores pode ser analisada com mais detalhe.
- Com efeito, no universo U , a fórmula

$$\exists x \text{ Cube}(x) \wedge \exists x \text{ Green}(x)$$

é **verdadeira** pois

- existe um objecto, **b**, que torna verdadeira a fórmula $\exists x \text{ Cube}(x)$;
- e existe um **outro** objecto, **d**, que torna verdadeira a fórmula $\exists x \text{ Green}(x)$.



- O facto de ambos os objectos serem referidos pela variável x não indica que a variável x represente o mesmo objecto pois as diferentes ocorrências da variável são ligadas a quantificadores diferentes.
- Em geral esta “ambiguidade” deve ser evitada usando-se variáveis “diferentes”

$$\exists x \text{ Cube}(x) \wedge \exists y \text{ Ball}(y)$$

mas esta fórmula tem exactamente o mesmo significado da fórmula acima!

Frases Aristotélicas

- Muitas frases envolvendo um só quantificador são traduzidas numa de quatro formas estudadas inicialmente por Aristóteles:

Frases	Afirmativas (A)	Negativas (N)
Universais (U)	Todas as bolas são leves	Nenhuma bola é leve
Particulares (P)	Algumas bolas são leves	Algumas bolas não são leves

- Estas formas estão relacionadas entre si (através da “negação cruzada”):
- A negação de uma afirmação particular é uma negação universal:
 - **AP:** Algumas bolas são leves.
 - **\neg AP:** É falso que algumas bolas sejam leves.
 - **NU:** Nenhuma bola é leve.
- A negação de uma afirmação universal é uma negação particular:
 - **AU:** Todas as bolas são leves.
 - **\neg AU:** É falso que todas as bolas sejam leves.
 - **NP:** Algumas bolas não são leves.

Frases Aristotélicas

- Estas frases podem ser facilmente traduzidas para fórmulas de 1ª ordem, sendo conveniente rephraseá-las para a tradução ser directa:
- **Afirmações Universais:** Todas as bolas são **leves**
 - Qualquer que seja o objecto, se for uma bola então ele é leve.
 - **AU:** $\forall \mathbf{x} (\text{Ball}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{Light}(\mathbf{x}))$
- **Negações Universais :** Nenhuma bola é leve
 - Qualquer que seja o objecto, se for uma bola então ele não é leve.
 - **NU:** $\forall \mathbf{x} (\text{Ball}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg \text{Light}(\mathbf{x}))$
- **Afirmações Particulares:** Algumas bolas são leves
 - Existem objectos que são bolas e são leves.
 - **AP:** $\exists \mathbf{x} (\text{Ball}(\mathbf{x}) \wedge \text{Light}(\mathbf{x}))$
- **Negações Particulares:** Algumas bolas não são leves
 - Existem objectos que são bolas e não são leves.
 - **NP:** $\exists \mathbf{x} (\text{Ball}(\mathbf{x}) \wedge \neg \text{Light}(\mathbf{x}))$

Frases com um só Quantificador

- O método de rephrasing as frases deve ser utilizado sempre que as frases sejam mais complexas e/ou apareçam de uma forma mais estilizada. Alguns exemplos ilustram este método:

- Algumas bolas pretas são leves.

Existem objectos **que** são bolas **e** são pretos **e** são leves

$\exists \mathbf{x} (\text{Ball}(\mathbf{x}) \wedge \text{Black}(\mathbf{x}) \wedge \text{Light}(\mathbf{x}))$

- Algumas bolas que não são brancas são leves

Existem objectos **que** são bolas **e** não são brancos **e** são leves

$\exists \mathbf{x} (\text{Ball}(\mathbf{x}) \wedge \neg \text{White}(\mathbf{x}) \wedge \text{Light}(\mathbf{x}))$

- Todas as bolas são brancas ou pretas

Qualquer que seja o objecto, **se** for uma bola, **então** é branco **ou** preto.

$\forall \mathbf{x} (\text{Ball}(\mathbf{x}) \rightarrow (\text{Black}(\mathbf{x}) \vee \text{White}(\mathbf{x})))$

- Todas as bolas são leves a menos que sejam pretas.

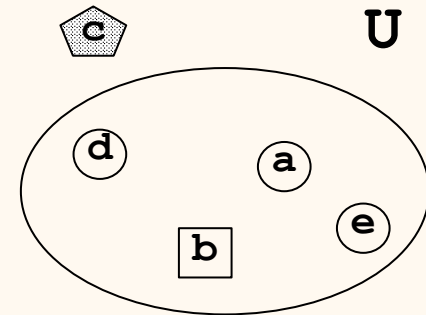
Qualquer que seja o objecto, **se** for uma bola e *não for preto*, **então** é leve

$\forall \mathbf{x} ((\text{Ball}(\mathbf{x}) \wedge \neg \text{Black}(\mathbf{x})) \rightarrow \text{Light}(\mathbf{x}))$

Frases com um só Quantificador

- Algumas frases têm um significado que pode ser **contraintuitivo**. Por exemplo, assumindo o domínio de discurso **U**, como interpretar a frase:

Todos os dodecaedros têm dez faces.



- Intuitivamente a frase é **falsa** (os dodecaedros têm 12 faces).
 - No entanto, a fórmula “aberta” é satisfeita para todos os objectos do domínio. Por exemplo, aplicada ao objecto **a**, a fórmula é verdadeira porque o objecto **a** não é um dodecaedro!
- $$\text{Dodec}(\mathbf{a}) \rightarrow \text{TenFaces}(\mathbf{a})$$
- Portanto, no domínio de discurso **U**, a frase é **verdadeira** !
 - Mas existindo dodecaedros (se **c** pertencesse a **U**) a frase seria falsa!
 - Desta forma, frases deste tipo são uma forma *estilizada* de afirmar *negações* (no caso, **não** existem dodecaedros no domínio de discurso) usadas vulgarmente em linguagem natural. Por exemplo a frase

“Se o cavalo tivesse asas ele voava”

pode ser interpretada como afirmando que o cavalo não tem asas (ele não voa...).

Frases com um só Quantificador

- De notar ainda algumas formas de implicatura, que podem ser sugeridas por algumas frases. Por exemplo a frase:

(1) Algumas bolas são brancas $\exists x (\text{Ball}(x) \wedge \text{White}(x))$

pode sugerir a frase subentendida

(2) (... e) algumas bolas não são brancas $\exists x (\text{Ball}(x) \wedge \neg \text{White}(x))$

oposta à frase

(3) Todas as bolas são brancas $\forall x (\text{Ball}(x) \rightarrow \text{White}(x))$

- No entanto a frase que nega (3) é a frase (2) e ela não foi explicitada. Assim sendo as frases (2) e $\neg(3)$ são “equivalentes” (têm o mesmo significado)

$$\begin{aligned} & \exists x (\text{Ball}(x) \wedge \neg \text{White}(x)) \\ & \neg(\forall x (\text{Ball}(x) \rightarrow \text{White}(x))) \end{aligned}$$

- Mas as frases (1) e $\neg(3)$ já não o são (aliás nem (1) e (3) são equivalentes)

$$\begin{aligned} & \exists x (\text{Ball}(x) \wedge \text{White}(x)) \\ & \neg(\forall x (\text{Ball}(x) \rightarrow \text{White}(x))) \end{aligned}$$

(pensemos num universo apenas com bolas brancas ...)