

# Lógica Computacional

---

Demonstrações de alguns Teoremas em DN

Conversão entre Implicações e Disjunções

Negações e Implicações

Negações e Equivalências

# Implicações Triviais

- Implicação Trivial  $\{ B \} \vdash A \rightarrow B$

1	B	
2	A	
3	B	Reit : 1
4	A $\rightarrow$ B	Intr $\rightarrow$ : 2-3

Implicação Trivial  $\{ \neg A \} \vdash A \rightarrow B$

1	$\neg A$	
2	A	
3	$\perp$	Intr $\perp$ : 1,2
4	B	Elim $\perp$ : 3
5	A $\rightarrow$ B	Intr $\rightarrow$ : 2-3

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Conversão  $\{ A \rightarrow B \} \vdash \neg A \vee B$

1	$A \rightarrow B$	
2	$\neg(\neg A \vee B)$	
3	$\neg A$	
4	$\neg A \vee B$	Intr $\vee$ : 3
5	$\perp$	Intr $\perp$ : 2, 4
6	$\neg\neg A$	Intr $\neg$ : 3 - 5
7	$A$	Elim $\neg$ : 6
8	$B$	Elim $\rightarrow$ : 1, 7
9	$\neg A \vee B$	Intr $\vee$ : 8
10	$\perp$	Intr $\perp$ : 2, 9
11	$\neg\neg(\neg A \vee B)$	Intr $\neg$ : 2 - 10
12	$\neg A \vee B$	Elim $\neg$ : 11

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Conversão  $\{\neg A \vee B\} \vdash A \rightarrow B$

1	$\neg A \vee B$	
2	$A$	
3	$\neg A$	
4	$\perp$	Intr $\perp$ : 2 , 3
5	$B$	Elim $\perp$ : 4
6	$B$	
7	$B$	Reit: 6
8	$B$	Elim $\vee$ : 1 , 3 - 5, 7 - 8
9	$A \rightarrow B$	Intr $\rightarrow$ : 1 - 8

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Meio Excluído  $\{ \} \vdash A \vee \neg A$

1			
2		_____	
3		$\neg(A \vee \neg A)$	
4		_____	
5		$A$	
6		_____	
7		$A \vee \neg A$	Intr $\vee$ : 2
8		$\perp$	Intr $\perp$ : 2, 4
9		$\neg A$	Intr $\neg$ : 3 - 5
10		$A \vee \neg A$	Intr $\vee$ : 6
11		$\perp$	Intr $\perp$ : 2, 7
12		_____	
13		$\neg\neg(A \vee \neg A)$	Intr $\neg$ : 2 - 8
14		$A \vee \neg A$	Elim $\neg$ : 9

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

---

- Meio Excluído  $\{ \} \vdash A \vee \neg A$

1		_____	
1			A
2			_____
			A
3			A $\rightarrow$ A
4			A $\vee$ $\neg A$

Reit : 1  
Intr  $\rightarrow$ : 1 - 2  
Conversão: 3

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Resolução       $\{ A \vee B, \neg B \vee C \} \vdash A \vee C$

1	$A \vee B$	
2	$\neg B \vee C$	
3	$A$	
4	$A \vee C$	Intr $\vee$ : 3
5	$B$	
6	$\neg B$	
7	$\perp$	Intr $\perp$ : 5 , 6
8	$C$	Elim $\perp$ : 7
9	$C$	
10	$C$	Reit: 9
11	$C$	Elim $\vee$ : 2 , 6 - 9 , 10 - 11
12	$A \vee C$	Intr $\vee$ : 11
13	$A \vee C$	Elim $\vee$ : 1 , 3 - 4 , 5 - 12

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

---

- Resolução       $\{ A \vee B, \neg B \vee C \} \vdash A \vee C$

1	$A \vee B$	
2	$\neg B \vee C$	
<hr/>		
3	$\neg A \rightarrow B$	Conversão: 1
4	$B \rightarrow C$	Conversão: 2
5	$\neg A$	
<hr/>		
6	$B$	Elim $\rightarrow$ : 3 , 5
7	$C$	Elim $\rightarrow$ : 4 , 6
8	$\neg A \rightarrow C$	Intr $\rightarrow$ : 5 - 7
9	$A \vee C$	Conversão: 8

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Contrapositiva  $\rightarrow \{ A \rightarrow B \} \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

1	$A \rightarrow B$	
2	$\neg B$	
3	$A$	
4	$B$	Elim $\rightarrow$ : 1 , 3
5	$\perp$	Intr $\perp$ : 2 , 4
6	$\neg A$	Intr $\neg$ : 3 - 5
7	$\neg B \rightarrow \neg A$	Intr $\rightarrow$ : 2 - 6

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Contrapositiva  $\rightarrow \{ \neg A \rightarrow \neg B \} \vdash B \rightarrow A$

1	$\neg A \rightarrow \neg B$	
2	$B$	
3	$\neg A$	
4	$\neg B$	Elim $\rightarrow$ : 1 , 3
5	$\perp$	Intr $\perp$ : 2 , 4
6	$\neg\neg A$	Intr $\neg$ : 3 - 5
7	$A$	Elim $\neg$ : 6
8	$B \rightarrow A$	Intr $\rightarrow$ : 2 - 7

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Negação  $\rightarrow$

$$\{\neg(A \rightarrow B)\} \vdash A \wedge \neg B$$

1	$\neg(A \rightarrow B)$	
2	B	
3	A	
4	B	Reit : 2
5	A $\rightarrow$ B	Intr $\rightarrow$ : 3 - 4
6	$\perp$	Intr $\perp$ : 1 , 5
7	$\neg B$	Intr $\neg$ : 2 - 6
8	$\neg A$	
9	A	
10	$\perp$	Intr $\perp$ : 8 , 9
11	B	Elim $\perp$ : 9 - 10
12	A $\rightarrow$ B	Intr $\rightarrow$ : 9 - 11
13	$\perp$	Intr $\perp$ : 1 , 12
14	$\neg\neg A$	Intr $\neg$ : 8 - 13
15	A	Elim $\neg$ : 14
16	A $\wedge$ $\neg B$	Intr $\wedge$ : 7 , 15

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

---

- **Negação**  $\rightarrow$

$$\{A \wedge \neg B\} \vdash \neg(A \rightarrow B)$$

1	$A \wedge \neg B$	
2	$A \rightarrow B$	
3	$A$	<b>Elim <math>\wedge</math>: 1</b>
4	$B$	<b>Elim <math>\rightarrow</math>: 2 , 3</b>
5	$\neg B$	<b>Elim <math>\wedge</math>: 1</b>
6	$\perp$	<b>Intr <math>\perp</math>: 4 , 5</b>
7	$\neg(A \rightarrow B)$	<b>Intr <math>\neg</math>: 2 - 6</b>

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- **Contrapositiva**  $\leftrightarrow \{ A \leftrightarrow B \} \vdash \neg A \leftrightarrow \neg B$

1	$A \leftrightarrow B$	
2	$\neg A$	
3	$B$	
4	$A$	$\text{Elim } \leftrightarrow: 1, 3$
5	$\perp$	$\text{Intr } \perp : 2, 4$
6	$\neg B$	$\text{Intr } \neg : 3 - 5$
7	$\neg B$	
8	$A$	
9	$B$	$\text{Elim } \leftrightarrow: 1, 8$
10	$\perp$	$\text{Intr } \perp : 7, 9$
11	$\neg A$	$\text{Intr } \neg : 8 - 10$
12	$\neg A \leftrightarrow \neg B$	$\text{Intr } \leftrightarrow: 2 - 6, 7 - 11$

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Contrapositiva  $\leftrightarrow \{ \neg A \leftrightarrow \neg B \} \vdash A \leftrightarrow B$

1	$\neg A \leftrightarrow \neg B$	
2	$A$	
3	$\neg B$	
4	$\neg A$	<b>Elim <math>\leftrightarrow</math>: 1 , 3</b>
5	$\perp$	<b>Intr <math>\perp</math> : 2 , 4</b>
6	$\neg\neg B$	<b>Intr <math>\neg</math> : 3 - 5</b>
7	$B$	<b>Elim <math>\neg</math> : 6</b>
8	$B$	
9	$\neg A$	
10	$\neg B$	<b>Elim <math>\leftrightarrow</math>: 1, 9</b>
11	$\perp$	<b>Intr <math>\perp</math> : 8 , 10</b>
12	$\neg\neg A$	<b>Intr <math>\neg</math> : 9 - 11</b>
13	$A$	<b>Elim <math>\neg</math> : 12</b>
14	$A \leftrightarrow B$	<b>Intr <math>\leftrightarrow</math>: 2 - 7 , 8 - 13</b>

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Negação  $\leftrightarrow$

$$\{\neg(A \leftrightarrow B)\} \vdash A \leftrightarrow \neg B$$

1	¬(A ↔ B)	
2	A	
3	B	
4	A	
5	B	Reit : 3
6	B	
7	A	Reit : 2
8	A ↔ B	Intr ↔: 4 - 5 , 6 - 7
9	⊥	Intr ⊥ : 1 , 8
10	¬B	Intr ¬ : 3 - 9
11	¬B	
...	...	
19	A	
20	A ↔ ¬B	Intr ↔: 2 - 10 , 11 - 19

# Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Negação  $\leftrightarrow$

$\{A \leftrightarrow \neg B\} \vdash \neg(A \leftrightarrow B)$

1.	$A \leftrightarrow \neg B$	
2.	$A \leftrightarrow B$	
3.	$A$	
4.	$B$	Elim $\leftrightarrow$ : 2 , 3
5.	$\neg B$	Elim $\leftrightarrow$ : 1 , 3
6.	$\perp$	Intr $\perp$ : 4 , 5
7.	$\neg A$	Intr $\neg$ : 3 - 6
8.	$B$	
9.	$A$	Elim $\leftrightarrow$ : 2 , 8
10.	$\perp$	Intr $\perp$ : 7 , 9
11.	$\neg B$	Intr $\neg$ : 8 - 10
12.	$A$	Elim $\leftrightarrow$ : 1 , 11
13.	$\perp$	Intr $\perp$ : 7 , 12
14.	$\neg(A \leftrightarrow B)$	Intr $\neg$ : 2 - 12

# Teoremas relacionando Equivalências e Negações

## - Encadeamento de Equivalências

$$\{ A \leftrightarrow ( B \leftrightarrow C ) \} \vdash \neg A \leftrightarrow ( B \leftrightarrow \neg C )$$

1	$A \leftrightarrow ( B \leftrightarrow C )$	
2	$\neg A \leftrightarrow \neg( B \leftrightarrow C )$	<b>Contrapositiva <math>\leftrightarrow</math> : 1</b>
3	$\neg A$	
4	$\neg( B \leftrightarrow C )$	<b>Elim <math>\leftrightarrow</math>: 2 , 3</b>
5	$B \leftrightarrow \neg C$	<b>Negação <math>\leftrightarrow</math> : 4</b>
6	$B \leftrightarrow \neg C$	
7	$\neg( B \leftrightarrow C )$	<b>Negação <math>\leftrightarrow</math> : 6</b>
8	$\neg A$	<b>Elim <math>\leftrightarrow</math>: 2 , 7</b>
9	$\neg A \leftrightarrow ( B \leftrightarrow \neg C )$	<b>Intr <math>\leftrightarrow</math>: 3 - 5 , 6 - 8</b>

# Teoremas relacionando Equivalências e Negações

## - Encadeamento de Equivalências

$$\{\neg A \leftrightarrow (B \leftrightarrow \neg C)\} \vdash A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

1	$\neg A \leftrightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$	
2	$A \leftrightarrow \neg(B \leftrightarrow \neg C)$	<b>Contrapositiva <math>\leftrightarrow</math> : 1</b>
3	$A$	
4	$\neg(B \leftrightarrow \neg C)$	<b>Elim <math>\leftrightarrow</math>: 2 , 3</b>
5	$B \leftrightarrow C$	<b>Negação <math>\leftrightarrow</math> : 4</b>
6	$B \leftrightarrow C$	
7	$\neg(B \leftrightarrow \neg C)$	<b>Negação <math>\leftrightarrow</math> : 6</b>
8	$A$	<b>Elim <math>\leftrightarrow</math>: 2 , 7</b>
9	$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$	<b>Intr <math>\leftrightarrow</math>: 3 - 5 , 6 - 8</b>