

Lógica Computacional

Completude de Operadores Booleanos

Formas Normais a partir de Tabelas de Verdade

Frases Condicionais

Operador de Implicação (material)

Completude dos Operadores Booleanos

- Tendo já considerado os operadores Booleanos de Negação, Conjunção e Disjunção, bem como as regras de inferência que os introduzem e eliminam no sistema de dedução natural, podemos colocar-nos as questões:
 1. Serão estes operadores **suficientes**?
 2. Serão estes operadores **necessários**?
- Como veremos a resposta a estas questões não é inequívoca. De facto, ela depende dos objectivos que se pretendem atingir, nomeadamente
- **Poder de Expressão:** Assumindo que todas as operações Booleanas são funcionais, os operadores de conjunção, disjunção e negação são suficientes. De facto eles são mais do que suficientes, pois *não são todos* necessários.
- **Naturalidade de Representação:** Em língua natural, é comum utilizar frases *condicionais* do tipo “se o polígono **a** é um quadrado, ele tem 4 lados”. Estas frases não são representadas *naturalmente* pelos operadores Booleanos já considerados, faltando um operador (de implicação) para exprimir essa condicionalidade.

Completude dos Operadores Booleanos

- Podemos provar facilmente que os operadores Booleanos são suficientes para exprimir qualquer **função** Booleana. Para isso basta fazer a sua tabela de verdade e representar a função pretendida numa das suas formas normais (DNF ou CNF). O exemplo seguinte ilustra esse processo .

A	B	C	$\varphi(A, B, C)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

Para obter a forma DNF de uma função φ a partir da tabela de verdade, basta escrever a disjunção dos monómios que são verdadeiros nas linhas em que a função é verdadeira.

$$\begin{aligned}\varphi = & (A \wedge B \wedge C) \\ & \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \\ & \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \\ & \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)\end{aligned}$$

Completude dos Operadores Booleanos

- Igualmente poderíamos obter a forma CNF duma função arbitrária como a anterior.

A	B	C	$\varphi(A, B, C)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

Para obter a forma CNF de uma função de uma função φ a partir da tabela de verdade, basta escrever a conjunção das cláusulas que são falsas nas linhas em que a função é falsa.

$$\begin{aligned}\varphi &= (\neg A \vee B \vee \neg C) \\ &\wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \\ &\wedge (A \vee B \vee \neg C) \\ &\wedge (A \vee B \vee C)\end{aligned}$$

- Desta forma, todas as funções Booleanas se podem representar por fórmulas Booleanas escritas nas suas formas normais, que apenas utilizam os operadores de conjunção, disjunção e negação.

Completude dos Operadores Booleanos

- Na realidade, aplicando a dupla negação às formas normais verificamos que todas as funções poderiam ser escritas apenas com os operadores de conjunção e negação ou com os operadores de disjunção e negação

$$\begin{aligned}\varphi &= (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \\ &\vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{C}) \\ &\vee (\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{C}) \\ &\vee (\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{C})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg\neg\varphi &= \neg(\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \\ &\quad \wedge \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{C}) \\ &\quad \wedge \neg(\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{C}) \\ &\quad \wedge \neg(\neg \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{C}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi &= (\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{C}) \\ &\wedge (\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{C}) \\ &\wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{C}) \\ &\wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vee \mathbf{C})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg\neg\varphi &= \neg(\neg(\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{C}) \\ &\quad \vee \neg(\mathbf{A} \vee \neg \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{C}) \\ &\quad \vee \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vee \neg \mathbf{C}) \\ &\quad \vee \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \vee \mathbf{C}))\end{aligned}$$

- Assim os conjuntos de funções $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são **funcionalmente completos**, isto é, qualquer função Booleana pode ser escrita numa fórmula que apenas utiliza operadores de um desses conjuntos completos.

Completude dos Operadores Booleanos

- Existem ainda conjuntos completos com um só operador. Com efeito, os operadores “não_e” (\downarrow) e “não_ou” (\uparrow), definidos como a negação da conjunção e da disjunção constituem conjuntos completos:

$$\mathbf{A \downarrow B =_{def} \neg (A \wedge B)}$$

$$\mathbf{A \uparrow B =_{def} \neg (A \vee B)}$$

Para o provar basta notar que com estes operadores,

- i. Se pode exprimir a negação

$$\neg \mathbf{A} = \neg (\mathbf{A \wedge A}) = \mathbf{A \downarrow A}$$

$$\neg \mathbf{A} = \neg (\mathbf{A \vee A}) = \mathbf{A \uparrow A}$$

- ii. Se pode exprimir a conjunção

$$\mathbf{A \wedge B} = \neg \neg (\mathbf{A \wedge B}) = \neg (\mathbf{A \downarrow B}) = (\mathbf{A \downarrow B}) \downarrow (\mathbf{A \downarrow B})$$

$$\mathbf{A \wedge B} = \neg \neg (\mathbf{A \wedge B}) = \neg (\neg \mathbf{A \vee \neg B}) = (\neg \mathbf{A \uparrow \neg B}) = (\mathbf{A \uparrow A}) \uparrow (\mathbf{B \uparrow B})$$

- iii. Se pode exprimir a disjunção

$$\mathbf{A \vee B} = \neg \neg (\mathbf{A \vee B}) = \neg (\neg \mathbf{A \wedge \neg B}) = (\neg \mathbf{A \downarrow \neg B}) = (\mathbf{A \downarrow A}) \downarrow (\mathbf{B \downarrow B})$$

$$\mathbf{A \vee B} = \neg \neg (\mathbf{A \vee B}) = \neg (\mathbf{A \uparrow B}) = (\mathbf{A \uparrow B}) \uparrow (\mathbf{A \uparrow B})$$

Naturalidade da Representação

- Apesar de o conjunto de operadores Booleanos já definidos ser completo, muitas frases em língua natural são mais facilmente traduzidas para fórmulas de primeira ordem (FPOs) se se introduzir o operador de implicação (\rightarrow).

Exemplo: Se o Tareco é um animal **então** ele respira.

Com a assinatura $\Sigma = \langle SP, SF \rangle$ onde $SP = \{\text{Animal}/1 \text{ e } \text{Respira}/1\}$ e $SF = \{\text{tareco}/0\}$, a frase condicional acima pode ser representada pela FPO

Animal(tareco) \rightarrow Respira(tareco)

- Antes de analisarmos em mais detalhe as propriedades deste novo operador Booleano, notemos que frases condicionais podem ser expressas de várias formas, pelo que deveremos assentar numa forma equivalente “**se A então B**”, que seja facilmente expressa pelo operador \rightarrow .

Condicionais Simples: Operador de Implicação

- Os exemplos seguintes mostram diferentes formas de exprimir frases condicionais bem como a sua forma “equivalente”.

1. **Se:** O Tareco respira se for um animal.

Forma “Equivalente”: **Se** o Tareco é um animal **então** ele respira

$\text{Animal}(\text{tareco}) \rightarrow \text{Respira}(\text{tareco})$

2. **Apenas se, só se:** O Tareco fala apenas se for humano (ou “O Tareco só fala se ...”)

Forma “Equivalente” 1: **Se** não for humano **então** o Tareco não fala

$\neg \text{Humano}(\text{tareco}) \rightarrow \neg \text{Fala}(\text{tareco})$

Forma “Equivalente” 2: **Se** o Tareco fala **então** é humano

$\text{Fala}(\text{tareco}) \rightarrow \text{Humano}(\text{tareco})$

Condicionais Simples: Operador de Implicação

3. **A menos que, excepto, :** O Tareco arranha a menos que seja manso.
ou

O Tareco arranha excepto se for manso.

Forma “equivalente” 1: **Se** não fôr manso **então** o Tareco arranha

$$\neg \text{Manso}(\text{tareco}) \rightarrow \text{Arranha}(\text{tareco})$$

Forma “equivalente” 2: **Se** não arranha **então** o Tareco é manso

$$\neg \text{Arranha}(\text{tareco}) \rightarrow \text{Manso}(\text{tareco})$$

- No entanto as formas abaixo **não** são equivalentes (como se analisará melhor no fim)

Forma “**não** equivalente” 1: **Se** fôr manso **então** o Tareco não arranha

$$\text{Manso}(\text{tareco}) \rightarrow \neg \text{Arranha}(\text{tareco})$$

Forma “**não** equivalente” 2: **Se** arranha **então** o Tareco não é manso

$$\text{Arranha}(\text{tareco}) \rightarrow \neg \text{Manso}(\text{tareco})$$

Bicondicionais: Condições Necessária e Suficiente

- Numa frase condicional distinguem-se duas frases componentes: a frase condicionante e a condicionada, ou equivalentemente a frase implicante e a frase implicada.
- Por vezes a implicação ocorre nos dois sentidos, correspondendo ao que vulgarmente se chama condição necessária e suficiente.

Exemplo: O Tareco respira **se** e **apenas se** for um animal. **X**

1. **Condição suficiente (se) :** Para o Tareco respirar **é suficiente** que seja animal. **✓**
O Tareco respira **se** for um animal; ou
Se o Tareco é um animal **então** ele respira.

Animal (tareco) → Respira (tareco)

2. **Condição necessária (só se):** Para respirar **é necessário** que o Tareco seja animal **X**
Tareco respira **apenas se** for um animal.
Se o Tareco respira então ele é um animal.

Respira (tareco) → Animal (tareco)

Bicondicionais e Operador de Equivalência

- As frases bicondicionais podem ser assim representadas por uma conjunção de duas fórmulas implicativas, ou mais compactamente pelo operador de equivalência (\leftrightarrow).

Exemplo: O Tareco respira **se e apenas se** for um ser vivo.

- Em vez da conjunção de duas implicações

$$(\text{SerVivo}(\text{tareco}) \rightarrow \text{Respira}(\text{tareco}))$$
$$\wedge$$
$$(\text{Respira}(\text{tareco}) \rightarrow \text{SerVivo}(\text{tareco}))$$

a frase pode ser representada pelo operador de equivalência

$$\text{SerVivo}(\text{tareco}) \leftrightarrow \text{Respira}(\text{tareco})$$

Implicação e Implicatura

- Muitas vezes pretende-se com uma frase condicional, i.e. com a forma de uma implicação, transmitir a ideia de uma dupla implicação. Estas situações dependem muito do estilo linguístico utilizado e do contexto em que ocorrem.

Exemplo 1: Se o Tareco é um gato **então** ele mia.

Gato (tareco) → Mia (tareco)

ou

Gato (tareco) ↔ Mia (tareco)

- A implicação “sugerida” implicitamente tem sido chamada de implicatura e pode ser avaliada se acrescentarmos algo como “ ... e o inverso também é verdade”.

Exemplo 1:

Se o Tareco é um gato **então** ele mia ... e se mia então é um gato (!)

Gato (tareco) ↔ Mia (tareco)

Exemplo 2:

Se o Tareco é um gato **então** ele respira ... e se respira então é um gato (?)

Gato (tareco) → Respira (tareco)

Funcionalidade da Implicação (?) : Justificações

- Por vezes a funcionalidade da implicação não é clara ou é mesmo inexistente. Os seguintes exemplos ilustram esta situação, nomeadamente as dificuldades encontradas ou não no preenchimento das respectivas tabelas de verdade.

Exemplo 1: Se o Tareco vai para casa **então** ele tem fome.

C (t)	F (t)	C (t) $\rightarrow?$ F (t)
V	V	V/F
V	F	V/F
F	V	?
F	F	?

- Neste caso, em que a condição representa uma justificação, e pode ser substituída por um “porque” (“O Tareco vai para casa **porque** ele tem fome”) o valor de verdade da frase composta não pode ser inferida do valor de verdade dos componentes!
- Mesmo que o Tareco esteja a ir para casa ele pode ir por outro motivo!

Funcionalidade da Implicação (?) : Contrafactuais

- Noutros casos estamos interessados em “imaginar” o que se passaria em determinadas condições, mesmo que saibamos que elas não se verificam.
- Essa é a situação de um “contrafactual”, como o exemplificado abaixo.

Exemplo 1: Se o Tareco fosse um cão **então** ele ladrava / zurrava.

C (t)	L (t)	C (t) →? L (t)
V	V	-
V	F	-
F	V	V
F	F	F

C (t)	Z (t)	C (t) →? Z (t)
V	V	-
V	F	-
F	V	F
F	F	V

- Como pode ser verificado, por um lado não estamos interessados em saber o que se passaria se o implicante for verdadeiro (ele nunca o será!).
- Por outro lado, a verdade do contrafactual depende não dos valores de verdade dos implicante e implicado, mas sim da relação entre eles.
- De facto, um cão ladraria mas não zurraria, fosse ou não fosse o Tareco um cão.

Implicação Material - Funcionalidade

- Independentemente das utilizações linguísticas mais complexas que são usadas no dia a dia e que não são captadas pela Lógica em FPOs (Fórmulas de 1ª Ordem) a utilização mais vulgar das frases condicionais pode ser traduzida numa FPO com o auxílio do operador de implicação (material).
- Como qualquer outro operador Booleano, é necessário definir a função Booleana que implementa, que pode ser apresentada através da seguinte tabela de verdade

Se φ então ψ

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Implicação Material - Funcionalidade

Se φ então ψ .

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Se as primeiras duas linhas captam o significado “intuitivo” de uma frase condicional, as duas últimas podem causar estranheza:
- Qual o valor de verdade da frase “Se estiver sol vou à praia” no caso de não haver sol”?
- A opção que se toma neste caso é assumir que a frase é verdadeira, isto é, quem a profere não está a mentir (ou pelo menos não há forma de provar que o está a fazer), e portanto, tal como na justiça, “*in dubio pro reu*”.

Implicação Material - Equivalências

- Usando o método definido atrás para obtenção das DNF e CNF a partir de tabelas de verdade, podemos notar que a implicação pode ser escrita pelas expressões equivalentes:

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Em DNF

$$\begin{aligned}\phi \rightarrow \psi &\Leftrightarrow \\ &(\phi \wedge \psi) \\ &\vee (\neg\phi \wedge \psi) \\ &\vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)\end{aligned}$$

Em CNF

$$\begin{aligned}\phi \rightarrow \psi &\Leftrightarrow \\ &(\neg\phi \vee \psi)\end{aligned}$$

- Podemos agora revisar as traduções das frases condicionais com exceções que tínhamos deixado em aberto.

Frases Condicionais com Excepções

Exemplo: O Tareco arranha a menos que seja manso.

Formas “equivalentes” :

- **Se** não é manso **então** o Tareco arranha
- **Se** não arranha **então** o Tareco é manso

A	M	$\neg M \rightarrow A$	$\neg A \rightarrow M$
V	V	F V	F V
V	F	V V	F V
F	V	F V	V V
F	F	V F	V F

As frases equivalentes captam o sentido de que se não for uma exceção (ser manso) então o Tareco arranha. Mas, sendo uma exceção, ele pode arranhar (linha 1 - V).

Formas “**não** equivalentes” :

- **Se** é manso **então** o Tareco não arranha
- **Se** arranha **então** o Tareco não é manso

A	M	$M \rightarrow \neg A$	$A \rightarrow \neg M$
V	V	F F	F F
V	F	V F	V V
F	V	V V	V F
F	F	V V	V V

- As frases não equivalentes obrigam o Tareco, no caso excepcional (ser manso), a fazer o que os gatos mansos **podem** fazer! Sendo manso não pode arranhar (linha 1 - F).

Frases Condicionais com Exceções - Implicaturas

Exemplo: O Tareco arranha a menos que seja manso.

- Este exemplo ilustra uma outra forma de implicatura. Provavelmente o que se pretende dizer é que

- Tareco arranha a menos que seja manso ... e *nesse caso não arranha*".

... o que corresponderia não a uma implicação simples ($\neg M \rightarrow A$) mas sim a uma dupla implicação $(\neg M \rightarrow A) \wedge (M \rightarrow \neg A)$, o que corresponde a uma equivalência, representada pela tabela de verdade abaixo.

A	M	$\neg M \leftrightarrow A$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

- Mas, em geral, a tradução “adequada” será através de uma das formas equivalentes

Se não for manso **então** o Tareco arranha

Se não arranha **então** o Tareco é manso