

# Lógica Computacional

---

Métodos de Inferência

Passos de Inferência

Raciocínio por Casos

Raciocínio por Absurdo

# Inferência e Passos de Inferência

---

- A partir de um conjunto de premissas constituídas por proposições arbitrariamente complexas, podem inferir-se conclusões a partir de uma análise da estrutura das componentes dessas premissas (ou das conclusões pretendidas).
- Essas inferências podem ser arbitrariamente complexas, quer tendo em conta o número de premissas em que se baseiam, quer por via da complexidade das próprias premissas.
- No entanto, com mais ou menos dificuldade, elas podem ser justificadas, por uma sequência de passos de inferência, nos quais se vão estabelecendo conclusões intermédias, i.e. proposições que facilitam obter a conclusão desejada.

# Inferência e Passos de Inferência

---

- Cada um desses passos intermédios deverá ser simples. Em particular
  - Os passos de inferência devem ser **válidos**.
    - Se as proposições usadas forem verdadeiras a conclusão também o deverá ser.
  - As proposições usadas deverão ser em número **reduzido**
    - Não deverão ser usadas mais de 2 proposições
  - Apenas deverá ser tida em conta a estrutura “**exterior**” dessas proposições, não tentando analisar a sua estrutura mais “interior”.
    - Por exemplo se uma proposição for uma conjunção de disjunções, apenas usaremos o facto de ser uma conjunção!
- Vamos analisar através de alguns exemplos passos de inferência que são usados por todos nós, *mesmo que inconscientemente*, e que constituem os fundamentos da **dedução em língua natural**.

# Passos de Inferência - Conjunção

---

As proposições constituídas por **conjunções** prestam-se a dois passos de inferência muito simples. Sucintamente

1. Se duas proposições forem verdadeiras a sua conjunção também o é.

1. A Maria é alta

2. O João é baixo

---

3. A Maria é alta **e** o João é baixo

2. Inversamente, se uma proposição conjuntiva é verdadeira, cada uma das suas proposições componentes deverá sê-lo igualmente.

1. A Maria é alta **e** o João é baixo

---

2. A Maria é alta

3. O João é baixo

# Passos de Inferência - Disjunção

---

No caso de proposições constituídas por disjunções os passos de inferência são um pouco diferentes dos da conjunção.

1. Se uma proposição é verdadeira a sua disjunção também o é.

1. A Maria é alta
2. O João é baixo
3. A Maria é alta <b>ou</b> o João é baixo

2. No entanto, a inversa não é válida. Se uma proposição disjuntiva é verdadeira, não é verdade que cada uma das suas proposições componentes o seja

1. A Maria é alta ou o João é baixo	
2. A Maria é alta	???
3. O João é baixo	???

# Passos de Inferência - Disjunção

---

- A **disjunção** apresenta-se assim com diferenças importantes em relação à conjunção.
- Se a regra de “composição” da disjunção é válida, tal como era no caso da conjunção, ela é aparentemente **inútil**, já que permite concluir uma conclusão mais “fraca” que as premissas.
- Se se sabe que uma proposição é verdadeira “**A Maria é alta**”, que sentido faz inferir uma proposição mais “fraca” que a original “**A Maria é alta ou ...** “ ?
- De facto esta regra só tem utilidade se considerarmos o conjunto mais completo de regras de inferência, como veremos adiante.
- Por outro lado, aparentemente não podemos fazer quaisquer inferências a partir de disjunções, já que não sabemos qual das proposições “disjuntas” é verdadeira.
- E no entanto o próximo exemplo, ilustra uma inferência válida que se pode obter a partir de uma proposição disjuntiva, **sem se saber qual dos disjuntos é verdadeiro**.

# Passos de Inferência - Disjunção

---

## Exemplo:

Existe um número racional  $r$ , que se pode escrever na forma de potência  $r = a^b$ , em que quer a base  $a$ , quer o expoente  $b$  são números irracionais.

- À partida este resultado parece impossível de satisfazer. Por exemplo, se um número racional é aquele que é possível colocar na forma  $m/n$  em que  $m$  e  $n$  são números inteiros, é difícil de conceber que um número como  $e^\pi$  possa ser racional.
- De facto, se nem  $e$  nem  $\pi$  se podem colocar na forma de fracção, o que dizer do número  $e^\pi$  ?
- E no entanto ...

**existe um tal número!**

- Normalmente a forma mais simples de demonstrarmos a existência de um número (ou objecto) com um conjunto de propriedades é indicarmos um exemplo!
- Curiosamente, o que faremos neste caso é provar que tal número existe, embora não possamos indicar qual seja esse número (pelo menos sem recorrer a matemática avançada).

# Disjunção - Raciocínio por casos

---

## Exemplo:

Existe um número racional  $r$ , que se pode escrever na forma de potência  $r = a^b$ , em que quer a base  $a$ , quer o expoente  $b$  são números irracionais.

- Consideremos o número  $r = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Como é sabido (e provaremos de seguida) o número  $\sqrt{2}$  é um número irracional, e portanto  $r$  é claramente um número na forma  $a^b$  em que  $a$  e  $b$  são números irracionais.
- Embora não possamos concluir imediatamente que  $r$  seja um número racional ou irracional, podemos certamente dizer que  $r$ , tal como qualquer número real, **é racional ou não é racional (isto é irracional)**.
- Estamos assim perante uma disjunção em que não podemos concluir nada sobre os disjuntos, isto é não podemos concluir que  $r$  seja racional ou que  $r$  seja irracional.
- Mas analisemos cada um dos casos separadamente.



# Disjunção - Raciocínio por casos

---

## Exemplo:

Existe um número racional  $r$ , que se pode escrever na forma de potência  $r = a^b$ , em que quer a base  $a$ , quer o expoente  $b$  são números irracionais.

### Caso 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional

- Neste caso, concluímos obviamente que “existe um número racional  $r = a^b$ , em  $a$  e  $b$  irracionais”. De facto podemos dizer que esse número  $r$  é  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ .

### Caso 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional

- Neste caso, consideremos o número  $r' = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ . Esse número é claramente racional, já que  $r' = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ . Mas esse número tem base  $a' = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  irracional (por hipótese), e o expoente  $b' = \sqrt{2}$  é garantidamente irracional. Assim, podemos concluir que “existe um número racional  $r' = a'^{b'}$ , em  $a'$  e  $b'$  são irracionais”. Neste caso, o número é  $r' = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ .
- Assim sendo, em ambos os casos concluímos que “existe um número racional  $r = a^b$ , com  $a$  e  $b$  irracionais”, embora não saibamos se esse número é  $r = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  (caso 1) ou se é  $r' = 2 = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$  (como no caso 2).

# Disjunção - Raciocínio por casos

---

- A estrutura da argumentação pode ser apresentada da forma abaixo

1.	$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional ou $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional
m1.	$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional
	...
m2.	Existe um r que é racional ...
n1.	$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional
	...
n2.	Existe um r que é racional ...
k.	Existe um r que é racional

- A disjunção 1 origina dois sub-argumentos, baseados em cada um dos disjuntos dessa proposição, ambos chegando à mesma conclusão.
- Apesar de não sabermos qual dos disjuntos é verdadeiro, um deles sê-lo-á, pelo que a conclusão comum é necessariamente válida.

# Passos de Inferência - Negação

---

- No caso da negação já analisamos o caso da dupla negação que consideramos, a menos de graduações não consideradas na lógica de 1ª ordem como inferências válidas (de facto são equivalências)

1.	A Maria é alta
<hr/>	
2.	Não é verdade que a Maria não seja alta
2'	Não é verdade que a Maria seja baixa
1.	Não é verdade que a Maria não seja alta
<hr/>	
2.	A Maria é alta

- Mas estas regras não captam um tipo de raciocínio desenvolvido desde a antiguidade e utilizado frequentemente pelos gregos na sua sistematização dos sistemas de demonstração que desenvolveram, e de que o expoente máximo é o trabalho de Euclides na sistematização da geometria através dos seus “Elementos”.
- Mais concretamente, o **raciocínio por absurdo**.

# Negação - Raciocínio por absurdo

---

- O raciocínio por absurdo assume uma determinada hipótese e tenta, através de uma argumentação válida, chegar a uma conclusão que se verifica ser falsa.
- Como vimos, uma argumentação válida preserva a verdade, isto é, sempre que as premissas sejam verdadeiras a conclusão também o será.
- Mas se a conclusão obtida é falsa, então a única forma de justificar esse facto é termos iniciado a argumentação com premissas falsas.

1.	<del>Todas as aves voam</del>
2.	O Pingu é uma ave
3.	Mas ... o Pingu não voa !

1.	Todas as aves têm penas
2.	<del>O Bobby é uma ave</del>
3.	Mas ... o Bobby não tem penas !

- Isto é, pelo menos uma premissa é falsa, ... embora possa não ser claro qual delas.
- No raciocínio por absurdo, assume-se **uma única** premissa. Se a argumentação válida levar a uma conclusão falsa, somos levados a inferir que é **essa** premissa que é falsa!.
- Vamos ilustrar esta técnica de inferência com 2 exemplos famosos.

# Negação - Raciocínio por absurdo

---

## Exemplo 1:

- O conjunto dos números primos é infinito.

1.	O conjunto $C$ dos primos é finito
2.	$C = \{ 2, 3, 5, 7, \dots p \}$
3.	$p$ é o maior número primo
4.	Seja $q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1$
5.	$q$ não é divisível por 2 ( $q = 2 \cdot q_2 + 1$ )
6.	$q$ não é divisível por 3 ( $q = 3 \cdot q_3 + 1$ )
	...
$k$ .	$q$ não é divisível por $p$ ( $q = p \cdot q_p + 1$ )
$k+1$ .	$q$ não é divisível por nenhum primo
$k+2$ .	$q$ é primo
$k+3$ .	$C = \{ 2, 3, 5, 7, \dots p, q \} \neq C$
$k+4$ .	O conjunto $C$ dos primos <b>não</b> é finito

- Desta forma, ao chegarmos a uma contradição ( $C \neq C$ ), podemos concluir que a premissa era falsa e portanto “O conjunto  $C$  dos primos **não** é finito”.

# Negação - Raciocínio por absurdo

---

## Exemplo 2:

- O número  $\sqrt{2}$  é irracional.

1.	O número $\sqrt{2}$ é racional
2.	$\sqrt{2} = m/n$ , sendo a fracção irredutível
3.	$2 = m^2 / n^2$
4.	$m^2 = 2 * n^2$
5.	$m^2$ é par
6.	$m$ é par
7.	$m = 2 * p$
8.	$4p^2 = 2 * n^2$
9.	$n^2 = 2 * p^2$
10.	$n$ é par
11.	$n = 2 * q$
12.	$\sqrt{2} = p/q$
13.	<b><math>m/n</math> não é irredutível</b>
14.	O número $\sqrt{2}$ <b>não</b> é racional

- Desta forma, ao chegarmos a uma contradição (ao contrário da hipótese,  $m/n$  **não** é irredutível), podemos concluir que “o número  $\sqrt{2}$  **não** é racional”.

# Negação - Raciocínio por absurdo

---

- De notar que o raciocínio por absurdo foi utilizado durante esta última demonstração, nomeadamente para provar que “**se  $m^2$  é par então  $m$  também é par**”.
- Assim poderíamos ter feito a seguinte demonstração para esse resultado

	...
5.	$m^2$ é par
k+1.	$m$ não é par
k+2.	$m = 2*r+1$
k+3.	$m^2 = 4*r^2+4*r + 1$
k+4.	$m^2 = 2*(2*r^2+2*r) + 1$
k+5.	$m^2$ não é par !
k+6.	é falso que $m$ não seja par
6.	$m$ é par
	...

- Neste caso, sabendo-se que  $m^2$  é par, a hipótese adicional de “ $m$  não ser par” conduz a uma contradição ( $m^2$  não ser par!).
- Assim, a hipótese adicional é falsa, logo é falso que  $m$  não seja par, ou seja,  $m$  é par!
- **Nota:** Em rigor, as linhas k+1 a k+6 deveriam ser incluídas na demonstração anterior.