Lógica Computacional

Normalização e Formas Normais

Literais, Cláusulas e Monómios;

Formas Normais NNF, CNF e DNF

Algoritmos de Conversão

Forma Normal Negativa - NNF

- Uma fórmula ϕ está representada numa Forma Normal Negativa (NNF) se todas as negações que apareçam na fórmula ϕ apenas se aplicam a predicados e não à conjunção ou disjunção ou negação de fórmulas componentes.
- Por exemplo, a fórmula ϕ

$$\phi =_{def} \neg((A \vee \neg B) \wedge \neg (C \wedge \neg D))$$

não está na forma normal negativa, mas a fórmula equivalente φ abaixo está em NNF.

$$\varphi =_{def} (\neg A \wedge B) \vee (C \wedge \neg D)$$

- Com efeito, ϕ pode ser convertida em φ através da aplicação de algumas das regras de equivalência anteriores. Neste caso a conversão usa as regras da "Dupla Negação" e de "de Morgan".

ϕ	$=_{def}$	$\neg((A \vee \neg B) \wedge \neg(C \wedge \neg D))$	
dM	$\Leftrightarrow$	$\neg(A \vee \neg B) \vee \neg\neg (C \wedge \neg D)$	de Morgan ($\neg\wedge$)
dM	$\Leftrightarrow$	$(\neg A \wedge \neg\neg B) \vee \neg\neg(C \wedge \neg D)$	de Morgan ($\neg\vee$)
DN	$\Leftrightarrow$	$(\neg A \wedge \neg\neg B) \vee (C \wedge \neg D)$	dupla negação
dDN	$\Leftrightarrow$	$(\neg A \wedge B) \vee (C \wedge \neg D)$	dupla negação
	$=_{def}$	φ	

Forma Normal Negativa - NNF

- Uma forma normal negativa apenas contem disjunções e conjunções de fórmulas contendo **literais**, sendo usada a seguinte

Definição:

Um **literal** é uma fórmula elementar **P** ou a sua negação $\neg$**P**.

- Por exemplo a fórmula NNF anterior

$$(\neg A \wedge B) \vee (C \wedge \neg D)$$

pode ser reescrita como abaixo, "escondendo-se" as suas negações.

$$(Na \wedge B) \vee (C \wedge Nd)$$

Nota: A forma normal negativa não é única, nem sequer garante uma estrutura única, pois podemos aplicar-lhe outras leis que lhe alteram essa estrutura, nomeadamente as leis da distribuição. Por exemplo, todas as fórmulas NNF abaixo são equivalentes à mesma fórmula inicial ϕ

$$\begin{array}{ll} \Phi & =_{def} A \vee (B \wedge \neg C) \\ \mathbf{Cm} & \Leftrightarrow (\neg C \wedge B) \vee A \\ \mathbf{Di} & \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee \neg C) \end{array}$$

Forma Normal Conjuntiva - CNF

- Se a forma normal NNF não garante uma estrutura única a partir da fórmula inicial, essa situação é ultrapassada nas formas normais conjuntiva (**CNF**) e disjuntivas (**DNF**).

Definição (Cláusula)

Uma cláusula é uma disjunção de literais. Uma cláusula elementar é constituída por um só literal.

Definição (CNF)

Uma fórmula está na Forma Normal Conjuntiva (CNF) se for uma conjunção de cláusulas.

- Por exemplo, a fórmula abaixo está não só em NNF como em CNF

$$(\neg A \vee B) \wedge (C \vee \neg D)$$

- Apesar de essa forma não ser única, as cláusulas que a constituem podem ser ordenadas (por exemplo lexicograficamente – por ordem alfabética, como é o caso) tornando a representação “única” (a menos de simplificações).

Formas Normal Disjuntiva - DNF

- Definições semelhantes podem ser feitas para o caso da forma normal disjuntiva, embora neste caso não haja um nome estabelecido para o correspondente a cláusula. Assim adoptaremos a denominação “monómio”, por analogia com a álgebra.

Definição (Monómio)

Um monómio é uma conjunção de literais. Uma monómio elementar é constituído por um só literal.

Definição (DNF)

Uma fórmula está na Forma Normal Disjuntiva (DNF) se for uma disjunção de monómios.

- Por exemplo, a fórmula abaixo está não só em NNF como em DNF

$$(\neg A \land B) \lor (C \land \neg D)$$

- Tal como no caso da CNF, a forma DNF não é única, mas os monómios que a constituem podem ser ordenados (por exemplo lexicograficamente – por ordem alfabética) tornando a representação “única” (a menos de simplificações).

Formas Normais NNF, CNF e DNF

- Apesar de não constituírem formas "canónicas" (únicas) denotaremos por NNF(ϕ), CNF(ϕ) e DNF(ϕ) fórmulas equivalentes da fórmula ϕ, respectivamente nas formas normais negativa, conjuntiva e disjuntiva.

Exemplo:

A fórmula

$$\phi =_{def} \neg((A \vee \neg B) \wedge \neg (C \wedge \neg D))$$

tem as seguintes formas normais

$$\mathrm{NNF}(\phi) = (\neg A \wedge B) \vee (C \wedge \neg D)$$

$$\mathrm{DNF}(\phi) = (\neg A \wedge B) \vee (C \wedge \neg D)$$

$$\mathrm{CNF}(\phi) = (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg D) \wedge (B \vee \neg D)$$

Importância das Formas Normais (DNF)

- A forma normal DNF permite de uma forma expedita verificar se uma fórmula Booleana é P-TT (possível tautologicamente).
- Tradicionalmente, a Possibilidade Tautológica é referida como Satisfazibilidade. Em geral uma fórmula ϕ é satisfazível se existem interpretações que a tornam verdadeira (o que corresponde à definição de P-TT).

Exemplo:

Verificar se é satisfazível a fórmula

$$\phi =_{def} \neg((A \vee \neg B) \wedge \neg (C \wedge \neg D))$$

não é "imediato". No entanto, se considerarmos a sua forma normal DNF

$$DNF(\phi) = (\neg A \wedge B) \vee (C \wedge \neg D)$$

verifica-se imediatamente que ela é satisfazível, nomeadamente por interpretações:

- em que A seja Falsa e B seja Verdade

  ou

- em que C seja Verdade e D seja Falsa

Importância das Formas Normais (CNF)

- Se forma normal DNF permite verificar a satisfazibilidade a forma normal CNF permite verificar a não satisfazibilidade, isto é verificar que a fórmula não é uma verdade tautológica (V-TT).

Exemplo:

Verificar que a fórmula abaixo não é uma V-TT

$$\phi =_{def} \neg((A \vee \neg B) \wedge \neg (C \wedge \neg D))$$

não é "imediato". No entanto, se considerarmos a sua forma normal CNF

$$CNF(\phi) = (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg D) \wedge (B \vee \neg D)$$

verifica-se imediatamente que ela não é V-TT, pois não é verdadeira em interpretações:

- em que A seja Verdade e C seja Falsa

  ou
- em que B e C sejam Falsas

  ou
- em que A e D sejam Verdade

  ou
- em que B seja Falsa e D seja Verdade

Importância das Formas Normais (CNF e DNF)

- Pelo dito atrás, se estivermos interessados em verificar se uma fórmula ϕ não é P-TT ou não é F-TT (i.e. é P-TT) , basta convertermos essa fórmula nas suas formas CNF e DNF (respectivamente).
- Embora este método não seja muito eficiente, ele funciona bem para fórmulas de pequena dimensão.
- De notar, no entanto, que verificar se uma fórmula é satisfazível é em geral um problema muito complexo, que constitui um dos problemas fundamentais da Teoria da Computação.
- A resolução deste problema, conhecido por **SAT**, requer em geral um número de passos exponencial no número de variáveis utilizadas, e embora ninguém o tenha provado, é uma hipótese aceite por todos os Informáticos que não é possível em geral evitar este número exponencial de passos.
- Só para se ter uma ideia da dificuldade, uma fórmula com 50 variáveis proposicionais (fórmulas elementares) requer, no pior caso, a execução de um algoritmo cujo número de passos tem uma ordem de grandeza de

$$2^{50} \approx 10^{15} \approx 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 \text{ passos!}$$

Conversão para NNF, CNF e DNF

- Em geral estaremos interessados em converter uma fórmula ϕ nas suas formas NNF, CNF e DNF. Essa conversão já foi ilustrada anteriormente na conversão para CNF e é agora generalizada.

Conversão para NNF

A conversão para NNF de uma fórmula ϕ pode ser obtida por aplicação repetida das regras de **Dupla Negação** e de **de Morgan**, podendo ser simplificada e reorganizada pelas outras regras de equivalência durante este procedimento.

Conversão para CNF e DNF

A conversão para CNF e DNF de uma fórmula ϕ pode ser obtida por aplicação repetida das regras de **distribuição** à uma forma NNF(ϕ), podendo ser simplificada e reorganizada pelas outras regras de equivalência durante este procedimento.

Conversão para NNF

- As regras genéricas expostas atrás para a conversão de fórmulas nas suas formas normais podem ser mais sistematizadas. A forma NNF de uma fórmula ϕ pode ser obtida pela aplicação exaustiva das seguintes regras de conversão.

Conversão para NNF

1. $\mathbf{NNF}(\varphi) \rightarrow \mathbf{A}$ se $\varphi = \mathbf{A}$ for um literal
2. $\mathbf{NNF}(\neg\neg\varphi) \rightarrow \mathbf{NNF}(\varphi)$
3. $\mathbf{NNF}(\neg(\varphi \vee \psi)) \rightarrow \mathbf{NNF}(\neg\varphi) \wedge \mathbf{NNF}(\neg\psi))$
4. $\mathbf{NNF}(\neg(\varphi \wedge \psi)) \rightarrow \mathbf{NNF}(\neg\varphi) \vee \mathbf{NNF}(\neg\psi))$
5. $\mathbf{NNF}(\varphi \vee \psi) \rightarrow \mathbf{NNF}(\varphi) \vee \mathbf{NNF}(\psi)$
6. $\mathbf{NNF}(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \mathbf{NNF}(\varphi) \wedge \mathbf{NNF}(\psi)$

Demonstração: As regras de conversão apenas utilizam regras de equivalência pelo que fica garantida a equivalência entre a fórmula inicial e as sucessivas fórmulas que se obtêm. Por outro lado no final do processo, as negações só podem ocorrer em literais, pelo que se garante que a fórmula final está em NNF.

Nota 1: As regras acima assumem conjunções e disjunções de duas fórmulas, mas podem ser facilmente generalizadas para mais de 2 fórmulas através da associatividade dessa operações.

Nota 2: Em qualquer altura da conversão podem-se usar regras de **idempotência**, **elemento neutro**, e **elemento absorvente** para simplificação das fórmulas obtidas.

Conversão para CNF

- A conversão para a forma CNF é feita em dois tempos: primeiro faz-se a conversão para a forma NNF e depois aplicam-se as seguintes regras de conversão

Conversão para CNF (φ está em NNF)

1. $\mathtt{CNF}(\varphi) \rightarrow \varphi$ se φ for uma cláusula
2. $\mathtt{CNF}(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \mathtt{CNF}(\varphi) \wedge \mathtt{CNF}(\psi)$
3. $\mathtt{CNF}((\varphi_1 \wedge \psi_1) \vee (\varphi_2 \wedge \psi_2)) \rightarrow \mathtt{CNF}(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \mathtt{CNF}(\varphi_1 \vee \psi_2) \wedge \mathtt{CNF}(\psi_1 \vee \varphi_2) \wedge \mathtt{CNF}(\psi_1 \vee \psi_2)$

Demonstração: Se a fórmula inicial estiver em NNF, as negações só podem ocorrer em literais. As regras de conversão apenas utilizam regras de equivalência pelo que fica garantida a equivalência entre a fórmula inicial e as sucessivas fórmulas que se obtêm. Por outro lado no final do processo, as disjunções só podem ocorrer em cláusulas, pelo que se garante que a fórmula final está em CNF.

Nota 1: As regras acima assumem conjunções e disjunções de duas fórmulas, mas podem ser facilmente generalizadas para mais de 2 fórmulas através da associatividade dessa operações.

Nota 2: Em qualquer altura da conversão podem-se usar regras de **idempotência, elemento neutro** e **elemento absorvente** para simplificação das fórmulas obtidas.

Conversão para DNF

- Similarmente, a conversão para a forma DNF é feita em dois tempos: primeiro faz-se a conversão para a forma NNF e depois aplicam-se as seguintes regras de conversão

Conversão para DNF (φ está em NNF)

1. $\mathbf{DNF}(\varphi) \rightarrow \varphi$ se φ for um monómio
2. $\mathbf{DNF}(\varphi \vee \psi) \rightarrow \mathbf{DNF}(\varphi) \vee \mathbf{DNF}(\psi)$
3. $\mathbf{DNF}((\varphi_1 \vee \psi_1) \wedge (\varphi_2 \vee \psi_2)) \rightarrow \mathbf{DNF}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \mathbf{DNF}(\varphi_1 \wedge \psi_2) \vee \mathbf{DNF}(\psi_1 \wedge \varphi_2) \vee \mathbf{DNF}(\psi_1 \wedge \psi_2)$

Demonstração: Se a fórmula inicial estiver em NNF, as negações só podem ocorrer em literais. As regras de conversão apenas utilizam regras de equivalência pelo que fica garantida a equivalência entre a fórmula inicial e as sucessivas fórmulas que se obtêm. Por outro lado no final do processo, as conjunções só podem ocorrer em monómios, pelo que se garante que a fórmula final está em DNF.

Nota 1: As regras acima assumem conjunções e disjunções de duas fórmulas, mas podem ser facilmente generalizadas para mais de 2 fórmulas através da **associatividade dessa operações.**

Nota 2: Em qualquer altura da conversão podem-se usar regras de **idempotência, elemento neutro** e **elemento absorvente** para simplificação das fórmulas obtidas.

Conversão para NNF, CNF e DNF

Exemplo 1

$$\phi =_{def} (A \lor B) \land (\neg(\neg A \lor C) \lor (C \land D))$$

1. Conversão para NNF

$\mathbf{dM} \quad \Leftrightarrow (A \lor B) \land ((\neg\neg A \land \neg C) \lor (C \land D))$

$\mathbf{DN} \quad \Leftrightarrow (A \lor B) \land ((A \land \neg C) \lor (C \land D))$

2. Conversão para CNF

$\mathbf{Di} \quad \Leftrightarrow (A \lor B) \land ((A \lor C) \land (A \lor D) \land (\neg C \lor C) \land (\neg C \lor D))$

$\mathbf{As} \quad \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C) \land (A \lor D) \land (\neg C \lor C) \land (\neg C \lor D)$

$\mathbf{T/En} \quad \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C) \land (A \lor D) \land \cancel{1 \land} (\neg C \lor D)$

3. Conversão para DNF

$\mathbf{Di} \quad \Leftrightarrow ((A \lor B) \land (A \land \neg C)) \lor ((A \lor B) \land (C \land D))$

$\mathbf{Di} \quad \Leftrightarrow ((A \land A \land \neg C) \lor (B \land A \land \neg C)) \lor ((A \land C \land D) \lor (B \land C \land D))$

$\mathbf{As} \quad \Leftrightarrow (A \land A \land \neg C) \lor (B \land A \land \neg C) \lor (A \land C \land D) \lor (B \land C \land D)$

$\mathbf{Id} \quad \Leftrightarrow (A \land \neg C) \lor (A \land \neg C \land B) \lor (A \land C \land D) \lor (B \land C \land D)$

$\mathbf{El} \quad \Leftrightarrow (A \land \neg C) \lor (A \land C \land D) \lor (B \land C \land D)$

Conversão para NNF, CNF e DNF

Exemplo 2 - A conversão CNF <-> DNF apenas requer distribuição e simplificação.

$\phi =_{def} (A \lor B \lor C) \land (\neg B \lor C)$

1. Conversão para DNF

Di $\Leftrightarrow (A \land \neg B) \lor (A \land C) \lor (B \land \neg B) \lor (B \land C) \lor (C \land \neg B) \lor (C \land C)$

Id $\Leftrightarrow (A \land \neg B) \lor (A \land C) \lor (B \land \neg B) \lor (B \land C) \lor (C \land \neg B) \lor C$

Ct $\Leftrightarrow (A \land \neg B) \lor (A \land C) \lor 0 \lor (B \land C) \lor (C \land \neg B) \lor C$

En $\Leftrightarrow (A \land \neg B) \lor (A \land C) \lor (B \land C) \lor (C \land \neg B) \lor C$

El $\Leftrightarrow (A \land \neg B) \lor C$

- Esta conversão poderia ser feita mais expeditamente usando as regras de equivalência por outra ordem, mas não existem heurísticas garantidas.

Di $\Leftrightarrow ((A \lor B) \land \neg B) \lor C$ // colocar o C em evidência

Ab $\Leftrightarrow (A \land \neg B) \lor C$ // Absorção do B

2. (Re-) Conversão para CNF

Di $\Leftrightarrow (A \lor C) \land (\neg B \lor C)$

Conversão para NNF, CNF e DNF

Exemplo 3 - Um exemplo mais "complicado"

$$\phi =_{def} B \lor \neg(A \lor B \lor (A \land C \land \neg(B \land D)))$$

1. Conversão para NNF

dM	$\Leftrightarrow$	$B \lor (\neg A \land \neg B \land \neg(A \land C \land \neg(B \land D)))$
dM	$\Leftrightarrow$	$B \lor (\neg A \land \neg B \land (\neg A \lor \neg C \lor \neg\neg(B \land D)))$
DN	$\Leftrightarrow$	$B \lor (\neg A \land \neg B \land (\neg A \lor \neg C \lor (B \land D)))$

2. Conversão para CNF

Di	$\Leftrightarrow$	$(B \lor \neg A) \land (B \lor \neg B) \land (B \lor (\neg A \lor \neg C \lor (B \land D)))$
Tt	$\Leftrightarrow$	$(B \lor \neg A) \land 1 \land (B \lor (\neg A \lor \neg C \lor (B \land D)))$
En	$\Leftrightarrow$	$(B \lor \neg A) \land (B \lor (\neg A \lor \neg C \lor (B \land D))$
As	$\Leftrightarrow$	$(B \lor \neg A) \land (B \lor \neg A \lor \neg C \lor (B \land D))$
Di	$\Leftrightarrow$	$(B \lor \neg A) \land (B \lor \neg A \lor \neg C \lor B) \land (B \lor \neg A \lor \neg C \lor D)$
Id	$\Leftrightarrow$	$(B \lor \neg A) \land (B \lor \neg A \lor \neg C) \land (B \lor \neg A \lor \neg C \lor D)$

Conversão para NNF, CNF e DNF

Exemplo 3 (cont)

A fórmula obtida

$$(B \lor \neg A) \land (B \lor \neg A \lor \neg C) \land (B \lor \neg A \lor \neg C \lor D)$$

… já está em CNF mas pode-se simplificar, de duas maneiras possíveis.

1. Colocando a disjunção $B \lor \neg A$ em evidência, após acrescentar um elemento neutro

En	$\Leftrightarrow$	$(B \lor \neg A \lor 0) \land (B \lor \neg A \lor \neg C) \land (B \lor \neg A \lor \neg C \lor D)$
Di	$\Leftrightarrow$	$(B \lor \neg A) \lor (0 \land \neg A \land (\neg C \lor D))$
Ea	$\Leftrightarrow$	$(B \lor \neg A) \lor 0$
En	$\Leftrightarrow$	$(B \lor \neg A)$

2. Aplicando directamente a regra da Eliminação

$$(B \lor \neg A) \land (B \lor \neg A \lor \neg C) \land (B \lor \neg A \lor \neg C \lor D)$$

El	$\Leftrightarrow$	$(B \lor \neg A)$

Nota: Esta fórmula está não só em CNF mas também em DNF (é uma conjunção de monómios elementares)

Conversão para NNF, CNF e DNF

Exemplo 3 (cont)

De notar que a fórmula inicial

$$B \vee \neg(A \vee B \vee (A \wedge C \wedge \neg(B \wedge D)))$$

poderia ser simplificada sem se converter explicitamente numa forma CNF ou DNF, usando apenas as simplificações que se podem fazer com alguma experiência na álgebra de Boole. Assim, a sub-fórmula

$$(A \vee B \vee (A \wedge C \wedge \neg(B \wedge D)))$$

pode simplificar-se pela regra de eliminação para $(A \vee B)$ obtendo-se a fórmula

$$B \vee \neg(A \vee B)$$

que se pode simplificar ainda mais

dM	$\Leftrightarrow$	$B \vee (\neg A \wedge \neg B)$
Ab	$\Leftrightarrow$	$B \vee \neg A$