

Lógica Computacional

Verdades e Falsidades

Tautológicas, Lógicas e Analíticas

Consequência e Equivalência

Álgebra de Boole

Consequências Tautológicas, Lógicas e Analíticas

- Como vimos, o nível a que se deve analisar a consequência (analítica, lógica e tautológica), tem em conta uma quantidade decrescente de conhecimento.

Exemplo 1:

- ✓ • **TW:** $\{\text{Tet}(a) \vee \text{Tet}(b), \neg \text{Tet}(a)\} \models_{\text{TW}} \text{Tet}(b)$
- ✓ • **FO:** $\{\text{T}(a) \vee \text{T}(b), \neg \text{T}(a)\} \models_{\text{FO}} \text{T}(b)$
- ✓ • **TT:** $\{\text{A} \vee \text{B}, \neg \text{A}\} \models_{\text{TT}} \text{B}$

Exemplo 2:

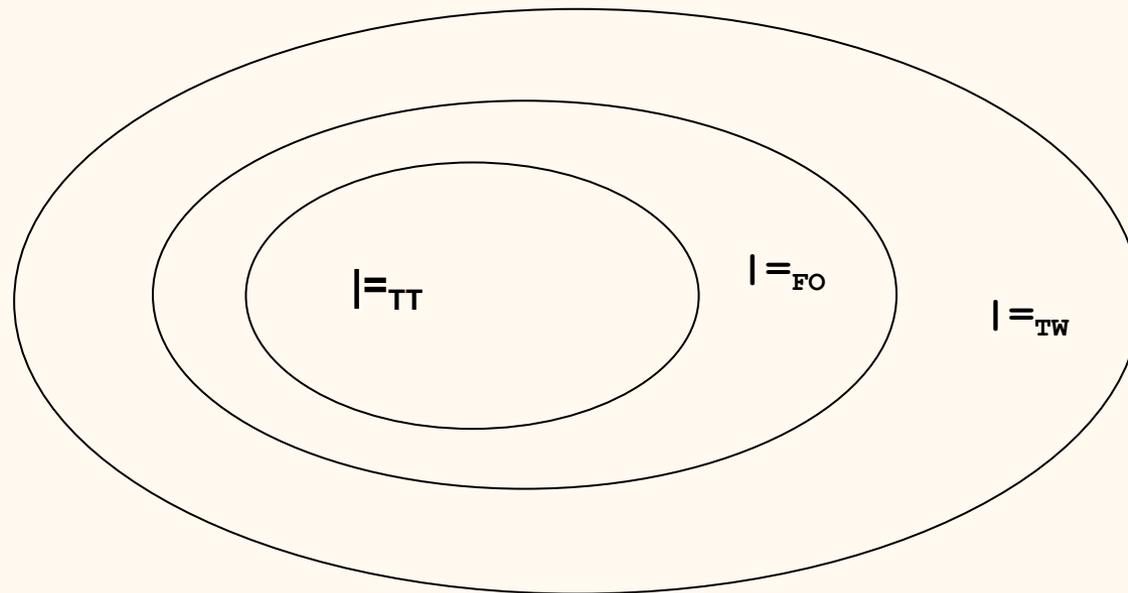
- ✓ • **TW:** $\{\text{Tet}(a) \vee \text{Tet}(b), \neg \text{Tet}(c), a = c\} \models_{\text{TW}} \text{Tet}(b)$
- ✓ • **FO:** $\{\text{T}(a) \vee \text{T}(b), \neg \text{T}(c), a = c\} \models_{\text{FO}} \text{T}(b)$
- X • **TT:** $\{\text{A} \vee \text{B}, \neg \text{C}, \text{D}\} \models_{\text{TT}} \text{B}$

Exemplo 3:

- ✓ • **TW:** $\{\text{Tet}(a) \vee \text{Tet}(b), \neg \text{Tet}(c), a = c\} \models_{\text{TW}} \neg \text{Cube}(b)$
- X • **FO:** $\{\text{T}(a) \vee \text{T}(b), \neg \text{T}(c), a = c\} \models_{\text{FO}} \neg \text{C}(b)$
- X • **TT:** $\{\text{A} \vee \text{B}, \neg \text{C}, \text{D}\} \models_{\text{TT}} \neg \text{E}$

Consequências Tautológicas, Lógicas e Analíticas

- Como pode ser facilmente observado, qualquer fórmula que seja uma consequência tautológica de um conjunto de premissas é igualmente uma consequência lógica dessas premissas, mas a inversa não é verdadeira.
- Similarmente, qualquer fórmula que seja uma consequência lógica de um conjunto de premissas é igualmente uma consequência analítica dessas premissas, mas a inversa não é verdadeira.



Verdades Tautológicas, Lógicas e Analíticas

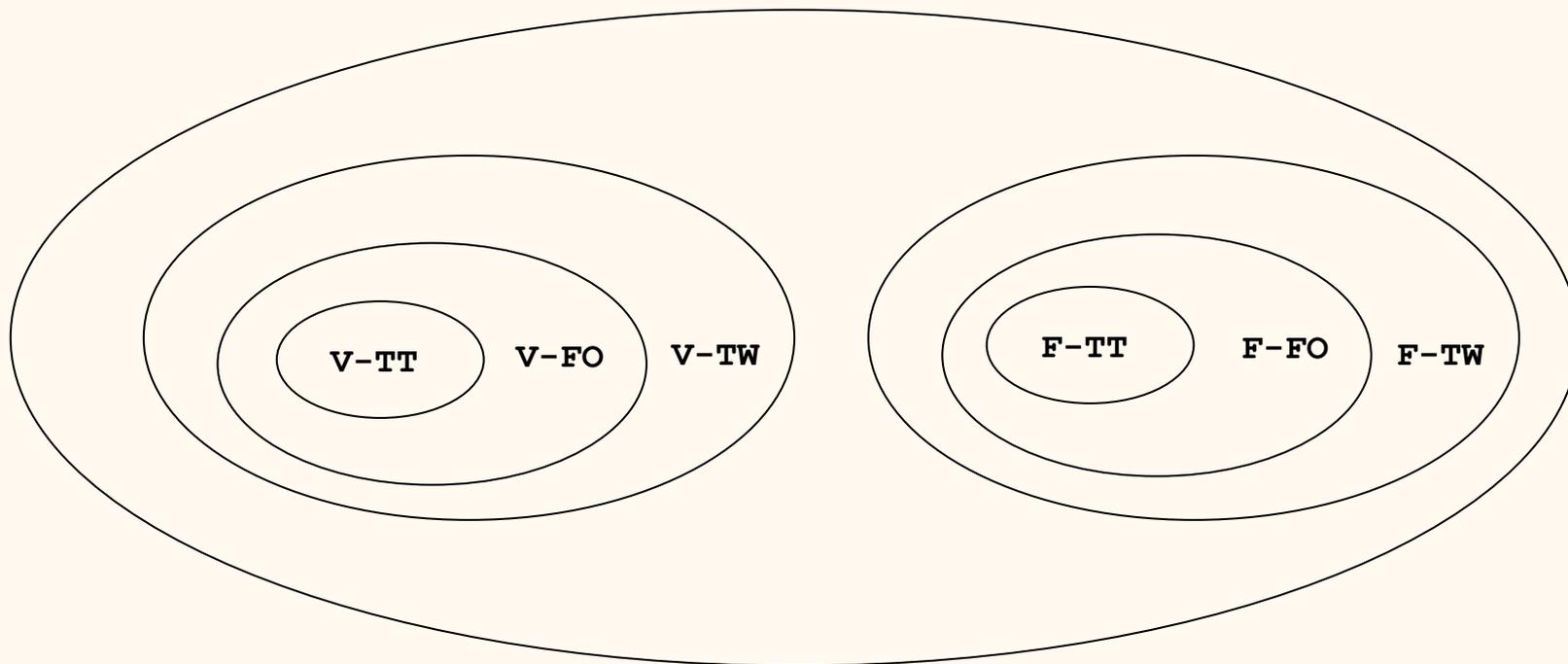
- Um caso especial de consequência ocorre quando o conjunto de premissas é vazio, pois nesse caso a conclusão é consequência de qualquer conjunto de premissas!
 - Intuitivamente as premissas permitem eliminar linhas em que elas não sejam todas verdadeiras. Não havendo premissas, não há linhas e eliminar e a conclusão deverá ser verdadeira em todas as interpretações!
- $\models_x \phi$: As fórmulas ϕ que são consequências, tautológicas, lógicas ou analíticas, de um conjunto vazio de premissas são **verdades tautológicas, lógicas ou analíticas**.
 - Denotaremos estas propriedades por V-TT, V-FO e V-TW, respectivamente.
 - As V-TT são vulgarmente denotadas por **tautologias** e as V-FO por **necessidades lógicas**.
- $\models_x \neg\phi$: Identicamente, chamaremos **falsidades tautológicas, lógicas ou analíticas**, às fórmulas ϕ cuja *negação* sejam consequências, tautológicas, lógicas ou analíticas, de um conjunto vazio de premissas.
 - Denotaremos estas propriedades por F-TT, F-FO e F-TW, respectivamente.
 - As N-TT (e as N-FO) são geralmente denotadas por **contradições (lógicas)**.
- $\not\models_x \neg\phi$: Finalmente, chamaremos **possibilidades tautológicas, lógicas ou analíticas**, às fórmulas que não sejam falsidades, tautológicas, lógicas ou analíticas.
 - Denotaremos estas propriedades por P-TT, P-FO e P-TW, respectivamente.

Consequências Tautológicas, Lógicas e Analíticas

- As fórmulas representando Verdades e Falsidades, tautológicas, lógicas e analíticas, têm naturalmente a mesma relação de inclusão das respectivas consequências.

$$\mathbf{V-TT} \subset \mathbf{V-FO} \subset \mathbf{V-TW}$$

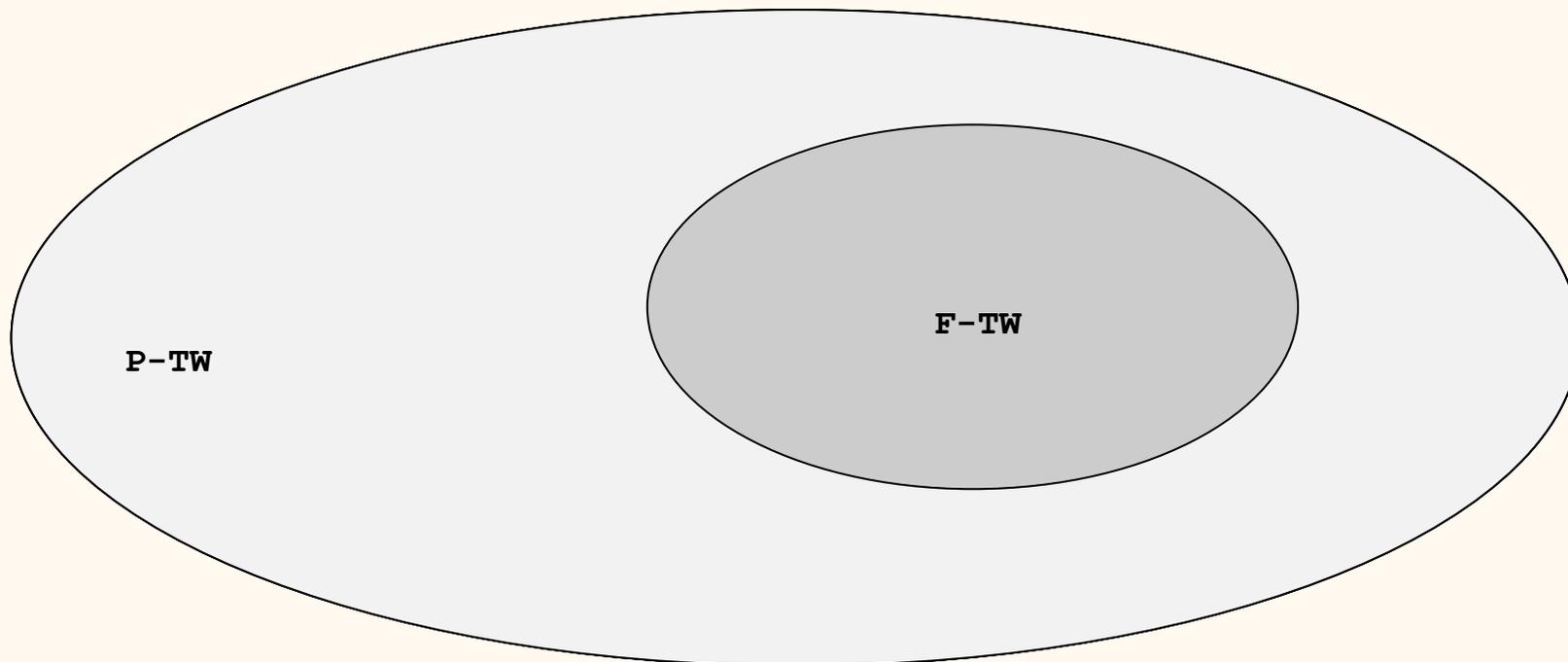
$$\mathbf{F-TT} \subset \mathbf{F-FO} \subset \mathbf{F-TW}$$



Consequências Tautológicas, Lógicas e Analíticas

- Já as fórmulas representando Possibilidades tautológicas, lógicas e analíticas, têm a relação oposta de inclusão das respectivas consequências, pois são os complementos dos conjuntos de Verdades e Falsidades.

$$\begin{aligned} \mathbf{P-TW} &\subset \mathbf{P-FO} \subset \mathbf{P-TT} \\ \mathbf{F-TW} &\supset \mathbf{F-FO} \supset \mathbf{F-TT} \end{aligned}$$



Verdades Tautológicas, Lógicas e Analíticas

Exemplos:

- **Large(a) \vee \neg Large(a)**
 $L(a) \vee \neg L(a)$
 $L \vee \neg L$
V-TT e portanto V-FO e V-TW
- **Dodec(b) \wedge \neg Dodec(b)**
 $D(a) \wedge \neg D(a)$
 $D \wedge \neg D$
F-TT e portanto F-FO e F-TW
- **Large(a) \vee Small(a)**
 $L(a) \vee S(a)$
 $L \vee S$
P-TW e portanto P-FO e P-TT
- **(Tet(a) \vee \neg Tet(b)) \vee \neg a = b**
 $(T(a) \vee \neg T(b)) \vee \neg a = b$
 $(A \vee B) \vee \neg I$
V-FO portanto V-TW mas apenas P-TT
- **Tet(a) \wedge \neg Tet(b) \wedge a = b**
 $(T(a) \wedge \neg T(b)) \wedge a = b$
 $(A \wedge \neg B) \wedge I$
F-FO portanto F-TW mas apenas P-TT
- **(Tet(a) \vee Cube(b) \vee Dodec(b)) \vee \neg a = b**
 $(T(a) \vee C(b) \vee D(b)) \vee \neg a = b$
 $(T \vee C \vee D) \vee \neg I$
V-TW mas apenas P-FO e P-TT
- **Tet(a) \wedge Cube(b) \wedge a = b**
 $T(a) \wedge C(b) \wedge a = b$
 $T \wedge C \wedge I$
F-TW mas apenas P-FO e P-TT

Equivalência de Fórmulas

- Em alguns casos sucede que não só a fórmula φ é consequência (tautológica, lógica ou analítica) de outra fórmula ϕ , como também ϕ é consequência de φ .
- Neste caso, dizemos que as fórmulas ϕ e φ são (tautológica, lógica ou analiticamente) **equivalentes**.

$$\varphi \leftrightarrow \phi \equiv_{\text{def}} \phi \models \varphi \wedge \varphi \models \phi$$

- Exemplificamos esta relação de equivalência entre fórmulas a nível tautológico com alguns exemplos. Começamos por um exemplo bem conhecido de uma das leis de de Morgan

$$\neg (A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

| A | B | $\neg (A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ |
|---|---|-------------------|------------------------|
| V | V | F | F |
| V | F | F | V |
| F | V | F | F |
| F | F | V | V |

Equivalência de Fórmulas

- De notar que em muitos casos a relação de consequência apenas se verifica numa direcção. Por exemplo, temos que

$$A \wedge B \models A \vee B$$

mas

$$A \vee B \not\models A \wedge B$$

| A | B | (A ∨ B) | | A ∧ B |
|---|---|---------|---|-------|
| V | V | V | ← | V |
| V | F | V | ← | F |
| F | V | V | ← | F |
| F | F | F | ← | F |

Formas Normais

- Se duas fórmulas são equivalentes elas representam proposições com o mesmo valor de verdade, e podem ser consideradas formas diferentes de descrever uma mesma proposição.
- No entanto, algumas formas podem ser mais convenientes que outras para determinar o valor de verdade de uma proposição. Por exemplo para uma pessoa é mais fácil apreender o significado de

$$A \wedge B$$

A e B são verdade

do que

$$\neg(\neg A \vee \neg B)$$

É falso que ou A seja falso ou B seja falso

- Por outro lado, será em geral útil obter uma forma “**canónica**” de duas fórmulas para as relacionar, nomeadamente para identificar imediatamente se elas representam a mesma proposição, ou se têm uma determinada propriedade.
- Em particular, certas formas são convenientes para determinados sistemas formais, como veremos mais tarde.
- Neste sentido são definidas 3 tipos de formas “normalizadas”, mais vulgarmente conhecidas como formas normais (NNF, CNF e DNF).

Álgebra de Boole

- Antes de estudar as formas normais e as regras para a sua conversão, é conveniente considerar que as fórmulas que temos considerado podem ser consideradas como elementos de uma álgebra **de Boole** que inclui:
 - os símbolos “0” e “1” (denotando respectivamente Verdade e Falso);
 - e as operações “ \neg ”, “ \wedge ” e “ \vee ” (denotando Negação, Conjunção e Disjunção).
 - Símbolos Proposicionais, (**P**, **Q**, ..) de uma assinatura Σ
- Nessa álgebra são válidas várias regras de **equivalência** (que podem ser facilmente verificadas através de tabelas de verdade).
- As regras seguintes permitem a “simplificação” de fórmulas

En. Elemento Neutro

$$A \vee 0 \Leftrightarrow A$$

$$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$$

Ea. Elemento Absorvente

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$$

$$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

Id. Idempotência

$$A \vee A \Leftrightarrow A$$

$$A \wedge A \Leftrightarrow A$$

Tt/Ct. Tautologia e Contradição

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$$

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$$

DN. Dupla Negação

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

Álgebra de Boole

- As próximas regras permitem re-organizar as fórmulas (“eliminar os parenteses”) sem alterar a sua estrutura

Cm. Comutação

$$\mathbf{A \vee B \Leftrightarrow B \vee A}$$

$$\mathbf{A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A}$$

As. Associação

$$\mathbf{A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee B \vee C}$$

$$\mathbf{A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge B \wedge C}$$

- Já as regras seguintes alteram significativamente essa estrutura

dM. Leis de de Morgan

$$\mathbf{\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B}$$

$$\mathbf{\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B}$$

Di. Leis de Distribuição

$$\mathbf{A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$$

$$\mathbf{A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

Álgebra de Boole

- Além destas regras básicas, outras regras de equivalência podem ser úteis na simplificação de fórmulas Booleanas, nomeadamente as regras de

El. Eliminação

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$$

$$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

$$A \vee (A \wedge B)$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge 1) \vee (A \wedge B)$$

$$\Leftrightarrow A \wedge (1 \vee B)$$

$$\Leftrightarrow A \wedge 1$$

$$\Leftrightarrow A$$

Ab. Absorção

$$A \wedge (\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge B$$

$$A \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow A \vee B$$

$$A \vee (\neg A \wedge B)$$

$$\Leftrightarrow (A \vee \neg A) \wedge (A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow 1 \wedge (A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow A \vee B$$

