Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2017/ 18 – 4.º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**n.º:**

1. (2.5 vals) Considere o conjunto *S* de cláusulas Horn abaixo.

1. $(F \wedge D) \rightarrow H$	6. $(A \wedge C) \rightarrow I$
2. $(B \wedge E) \rightarrow H$	7. $C \rightarrow F$
3. $G \rightarrow A$	8. $(I \wedge H) \rightarrow \bot$
4. $(F \wedge C) \rightarrow D$	9. $(A \wedge B) \rightarrow \bot$
5. $C \rightarrow G$	10. $\top \rightarrow C$

a) Mostre que o sistema é insatisfazível, indicando com = **T** os átomos que deveriam ser verdadeiros em qualquer interpretação que satisfaça as cláusulas de S (incluindo naturalmente o átomo ⊥) .

A = T (3)	B =	C = T (10)	D = T (4)	E =
F = T (7)	G = T (5)	H = T (1)	I = T (6)	⊥ = T (8)

b) Mostre que retirando apenas uma das cláusulas acima o conjunto se tornaria satisfazível. Justifique.

Pela alínea anterior, se retirarmos a cláusula 10, o sistema restante torna-se satisfazível, já que nenhum átomo teria de ser verdadeiro, sendo o sistema S \ {10} satisfeito pela interpretação **{¬A,¬B,¬C,¬D,¬E,¬F,¬G,¬H,¬I}**. Outra hipótese seria retirar uma das clásulas 5 ou 7. o sistema S \ {5} seria satisfeito pela interpretação **{¬A,¬B,C,D,¬E,F,¬G,H,¬I}**.

2. (3.5 vals) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$A \rightarrow (C \vee D)$
P2	$B \leftrightarrow (C \wedge D)$
P3	$C \leftrightarrow D$
Z	$A \rightarrow B$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão (Z) na forma clausal.

1. $\neg A \vee C \vee D$	de P1
2. $\neg B \vee C$	de P2
3. $\neg B \vee D$	de P2
4. $B \vee \neg C \vee \neg D$	de P2
5. $\neg C \vee D$	de P3
6. $C \vee \neg D$	de P3
7. A	de ¬Z
8. $\neg B$	de ¬Z

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

9. $C \vee D$	Res 7, 1
10. D	Res 9, 5
11. C	Res 10, 6
12. $B \vee \neg D$	Res 11, 4
13. B	Res 12, 10
14. □	Res 13, 8

3. **(2 vals)** Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Alguns cubos são maiores que todos os tetraedros à sua esquerda.

`∃x (Cube(x) ∧ ∀y ((Tet(y) ∧ LeftOf(y,x)) → Larger(x,y)))`

b) Tetraedros em linhas diferentes têm tamanhos diferentes.

`∀x ∀y ((Tet(x) ∧ Tet(y) ∧ ¬ SameRow(x,y)) → ¬ SameSize(x,y))`

c) Existem blocos pequenos, a menos que existam blocos que são cubos.

`¬∃x Cube(x) → ∃y Small(y)`

d) Os dodecaedros não têm blocos maiores que eles nas colunas em que estão colocados.

`∀x (Dodec(x) → ∀y ((x ≠ y ∧ SameCol(x,y)) → ¬Larger(y,x)))`

e) Não há mais do que um bloco que seja grande (Sugestão: Utilize o predicado de igualdade).

`∀x ∀y ((Large(x) ∧ Large(y))→ y = x)`

4. **(1.5 vals)** Converta as fórmulas para a forma Prenex com a matriz na forma normal conjuntiva (CNF).

a) `∀x ((Tet(x) ∧ ∃y ∃z Between(x,y,z)) → Large(x))`

`∀x ∀y ∀z (¬Tet(x) ∨ ¬Between(x,y,z) ∨ Large(x))`

b) `¬∃x (Dodec(x) ∧ ∀y SameRow(x,y))`

`∀x ∃y (¬ Dodec(x) ∨ ¬ SameRow(x,y))`

c) `∀x Small(x) → ∃y Cube(y)`

`∃x ∃y (¬Small(x) ∨ Cube(y))`

5. **(2 vals)** Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, as seguintes fórmulas Prenex:

a) `∃x ∀y (Cube(x) ↔ ¬FrontOf(y,x))`

1. `¬Cube(a) ∨ ¬FrontOf(y1,a)`
2. `Cube(a) ∨ FrontOf(y1,a)`

b) `∀x ∃y (Cube(x) → (SameSize(x,y) ∧ SameCol(x,y)))`

1. `¬Cube(x1) ∨ SameSize(x1,f(x1))`
2. `¬Cube(x2) ∨ SameCol(x2,f(x2))`

6. **(1 val)** Obtenha a substituição mais geral σ que unifique os dois termos abaixo. Indique qual o termo obtido quando se aplica essa substituição a qualquer um dos termos unificados.

T1: Between(x, f(y), g(x,y)) **T2: Between(h(z),z, w)**

substituição σ = `{ x/ h(f(y)), z / f(y), w / g(h(f(y)), y)}`

T1 σ = T2 σ = `Between(h(f(y)), f(y), g(h(f(y)), y)`

7. (5 vals) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	$\forall x\ ((\mathrm{Cube}(x) \wedge \exists y\ \mathrm{FrontOf}(x,y)) \rightarrow \mathrm{Large}(x))$
P2	$\forall x\ ((\mathrm{Large}(x) \vee \mathrm{Medium}(x)) \rightarrow \mathrm{Dodec}(x))$
P3	$\neg \exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \wedge \mathrm{Dodec}(x))$
C	$\neg \exists x\ \exists y\ (\mathrm{Cube}(x) \wedge \mathrm{FrontOf}(x,y))$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

1. $\neg\mathrm{Cube}(x1) \vee \neg\mathrm{FrontOf}(x1,y1) \vee \mathrm{Large}(x1)$	de P1
2. $\neg\mathrm{Large}(x2) \vee \mathrm{Dodec}(x2)$	de P2
3. $\neg\mathrm{Medium}(x3) \vee \mathrm{Dodec}(x3)$	de P2
4. $\neg\mathrm{Cube}(x4) \vee \neg\mathrm{Dodec}(x4)$	de P3
5. $\mathrm{Cube}(a)$	de ¬C
6. $\mathrm{FrontOf}(a,b)$	de ¬C

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

7.	$\neg\mathrm{Cube}(a) \vee \mathrm{Large}(a)$	Res	6,1	{x1/a, y1/b}
8.	$\mathrm{Large}(a)$	Res	7,5	{}
9.	$\mathrm{Dodec}(a)$	Res	8,2	{x2/a}
10.	$\neg\mathrm{Cube}(a)$	Res	9,4	{x4/a}
11.	$\square$	Res	10,5	{}

8. (2.5 vals) Notando que os números $1^3 + 2*1 = 3$, $2^3 + 2*2 = 12$, $3^3 + 2*3 = 33$ são todos divisíveis por 3, prove por indução sobre os números naturais, que qualquer número da forma $\mathbf{n^3+2n}$ $(n \geq 1)$ é divisível por 3.
Sugestão: Tenha em conta o binómio de Newton : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Passo Base:

Para n = 1 confirmamos que $1^3+2\cdot1 = 3$ é divisível por 3.

Passo de Indução: $n^3+2n = 3p \Rightarrow (n+1)^3+2(n+1) = 3q$

$(n+1)^3+2(n+1)=(n^3+3n^2+3n+1)+2(n+1)$	pelo binómio de Newton
$=(n^3+3n^2+2n+n+1)+2(n+1)$	substituindo 3n = 2n + n (regras da álgebra)
$=(n^3+2n)+3n^2+n+1+2n+2$	regras da álgebra (comutatividade e associação)
$=(n^3+2n)+3n^2+3n+3$	regras da álgebra (comutatividade e associação)
$= 3p + 3n^2+3n+3$	hipótese de indução
$= 3p + 3(n^2+n+1)$	regras da álgebra (distribuição)
$= 3(p+n^2+n+1)$	regras da álgebra (distribuição)
$= 3q$	fazendo $q = p+n^2+n+1$

q.e.d.