Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2017 / 18 – 3.º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**n.º:**

1. (3 val) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Alguns cubos não estão à frente de um dos tetraedros.

$\exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \land \exists y\ (\mathrm{Tet}(y) \land \neg\ \mathrm{FrontOf}(x,y)))$

b) Todos os tetraedros estão à esquerda de todos os dodecaedros, exceto do dodecaedro **b**.

$\mathrm{Dodec}(b) \land \forall x\ (\mathrm{Tet}(x) \to \forall y\ ((\mathrm{Dodec}(y) \land y \neq b) \to \mathrm{LeftOf}(x,y)))$

c) Todos os pares de cubos têm um dodecaedro entre si.

$\forall x\ \forall y\ ((\mathrm{Cube}(x) \land \mathrm{Cube}(y) \land x \neq y) \to \exists z\ (\mathrm{Dodec}(z) \land \mathrm{Between}(z,x,y)))$

d) Apenas tetraedros grandes estão à direita de um dos cubos.

$\exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \land \forall y\ (\mathrm{RightOf}(y,x) \to (\mathrm{Tet}(y) \land \mathrm{Large}(y))))$

e) Todos os cubos com um bloco à sua frente são pequenos.

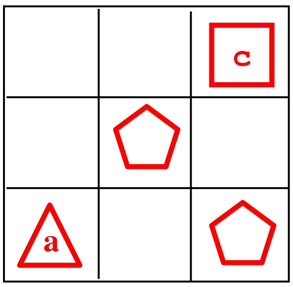
$\forall x\ ((\mathrm{Cube}(x) \land \exists y\ \mathrm{FrontOf}(y,x)) \to \mathrm{Small}(x))$

f) Não há blocos entre dois tetraedros.

$\forall x\ \forall y\ ((\mathrm{Tet}(x) \land \mathrm{Tet}(y)) \to \neg\ \exists z\ \mathrm{Between}(z,x,y))$

2. (3 val) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1. $\exists x\ (\mathrm{Tet}(x) \land \forall y\ (x \neq y \to (\mathrm{RightOf}(y,x) \land \neg\ \mathrm{FrontOf}(y,x))))$
2. $\mathrm{Cube}(c) \land \forall x\ (x \neq c \to \mathrm{FrontOf}(x,c))$
3. $\forall x((\neg \mathrm{Dodec}(x) \land \neg \mathrm{Cube}(x)) \to x = a)$
4. $\exists x(\mathrm{Cube}(x) \land \neg\ \exists y\ (x \neq y \land \mathrm{SameShape}(x,y)))$
5. $\neg\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ \neg\ \mathrm{Between}(x,y,z)$
6. $\exists x\ (\mathrm{Dodec}(x) \land \exists y\ (\mathrm{Dodec}(y) \land \mathrm{BackOf}(x,y) \land \mathrm{LeftOf}(x,y)))$



3. **(4 val)** Preencha as caixas assinaladas para completar a demonstração no sistema de Dedução Natural

1	∀x (Tet(x) → ∃y FrontOf(y,x))	
2	∀x ∀y (FrontOf(x,y) → Large(y))	
3	$\boxed{\text{¬ ∃x Large(x)}}$	
4	a:	
5	$\boxed{\text{Tet(a)}}$	
6	Tet(a) → ∃y FrontOf(y,a))	$\boxed{\text{Elim ∀ : 1}}$
7	∃y FrontOf(y,a)	Elim → : 5, 6
8	$\boxed{\text{b: FrontOf(b,a)}}$	
9	∀y (FrontOf(b,y) → Large(y))	Elim ∀ : 2
10	FrontOf(b,a) → Large(a)	Elim ∀ : 9
11	Large(a)	Elim → : 8 , 10
12	$\boxed{\text{∃x Large(x)}}$	$\boxed{\text{Intr ∃ : 11}}$
13	⊥	$\boxed{\text{Intr ⊥ : 3, 12}}$
14	$\boxed{\text{⊥}}$	$\boxed{\text{Elim ∃ : 7, 8 - 13}}$
15	¬Tet(a)	Intr ¬: 5 – 14
16	$\boxed{\text{∀x ¬ Tet(x)}}$	$\boxed{\text{Intr ∀: 4 - 15}}$
17	¬ ∃x Large(x) → ∀x ¬ Tet(x)	$\boxed{\text{Intr →: 3 - 16}}$

4. **(3 val)** Considere o seguinte argumento usando a linguagem de Tarski, e a respetiva demonstração.

1.	∀x (∃y Adjoins(x,y) → Cube(x))	
2.	∃x ¬ Cube(x)	
3.	a:	
4.	∃y Adjoins(a,y)	
5.	~~Cube(a)~~	Elim → : 1 , 4
6.	∃x Cube(x)	Intr ∃ : 5
7.	~~⊥~~	Intr ⊥ : 2 , 6
8.	¬ ∃y Adjoins(a,y)	Intr ¬ : 4 - 7
9.	∀x ¬ ∃y Adjoins(x,y)	Intr ∀ : 3 - 8

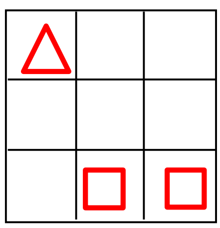
a) Indique todos os erros da demonstração acima, justificando.

Erros:

Erro 1. Na linha 5, a eliminação da quantificação universal está mal justificada, embora não influencie a validade da conclusão. A fórmula 1 deveria ser antes instanciada (substituindo **x** por **a**) para ∃y **Adjoins(a,y) → Cube(a)**, e só depois ser utilizada a eliminação da implicação.

Erro 2. O erro principal ocorre na linha 7, já que as fórmulas 2 e 6 não são contraditórias, nomeadamente a fórmula 6 é contraditória com ¬ ∃x **Cube(x)**, mas não com 2, já que a negação não é o operador mais externo.

b) Apresente no quadro em baixo um contraexemplo que mostre que o argumento não é válido.



5. **(2 val)** O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

```
1 | ∀x (Small(x) → Cube(x))
2 | ∀x (Large(x) → Tet(x))
  |------------------------
3 | ∃x Dodec(x) → ∃x Medium(x)
```

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário utilizar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

Nota: 2 respostas erradas cancelam uma resposta certa, mas a classificação da questão nunca será negativa.

- [x] ∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))
- [ ] ¬ ∃x (Large(x) ∧ Medium(x))
- [ ] ¬ ∃x (Large(x) ∧ Small(x))
- [ ] ¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))
- [ ] ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
- [ ] ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))
- [x] ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))
- [x] ¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))

6. **(5 val)** Valide o seguinte argumento apresentando a respetiva demonstração.

```
1  | ∀x ((Tet(x) ∨ Cube(x)) → ∃y FrontOf(x,y))
2  | ∀x ( ∃y FrontOf(x,y) → Small(x))
   |-------------------------------------------
3  |  | ∃x (Tet(x) ∧¬ Small(x))
   |  |------------------------
4  |  |  | a: Tet(a) ∧¬ Small(a)
   |  |  |----------------------
5  |  |  | Tet(a)                                   Elim ∧  : 4
6  |  |  | Tet(a) ∨ Cube(a)                         Intr ∨  : 5
7  |  |  | (Tet(a) ∨ Cube(a)) → ∃y FrontOf(a,y)     Elim ∀  : 1
8  |  |  | ∃y FrontOf(a,y)                          Elim →  : 6 , 7
9  |  |  | ∃y FrontOf(a,y) → Small(a)               Elim ∀  : 2
10 |  |  | Small(a)                                 Elim →  : 8 , 9
11 |  |  | ¬ Small(a)                               Elim ∧  : 4
12 |  |  | ⊥                                        Intr ⊥  : 10 - 11
13 |  | ⊥                                           Elim ∃  : 3, 4 - 12
14 | ¬ ∃x (Tet(x) ∧¬ Small(x))                      Intr ¬  : 3 -13
```