Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2017 / 18 – 2.º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**n.º:**

1. (5 val) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Um e apenas um dos blocos **a** e **b** é pequeno.

$$\mathtt{Small(a)} \leftrightarrow \neg\mathtt{Small(b)}$$

b) Os blocos que não são tetraedros são cubos ou pequenos

$$\forall x\ (\neg\mathtt{Tet}(x) \rightarrow (\mathtt{Cube}(x) \vee \mathtt{Small}(x)))$$

c) Apenas alguns blocos, que são dodecaedros, estão ao lado (adjacentes) do bloco **a**.

$$\exists x\ \mathtt{Adjoins}(x,a) \wedge \forall x\ (\mathtt{Adjoins}(x,a) \rightarrow \mathtt{Dodec}(x))$$

d) Alguns blocos são cubos, mas não todos.

$$\exists x\ \mathtt{Cube}(x) \wedge \neg\forall x\ \mathtt{Cube}(x)$$

e) Os blocos **a** e **b** não são ambos tetraedros.

$$\neg\ (\mathtt{Tet}(a) \wedge \mathtt{Tet}(b))$$

f) Todos os blocos grandes são tetraedros excepto o **c**.

$$\forall x\ ((\mathtt{Large}(x) \wedge x \neq c) \rightarrow \mathtt{Tet}(x))$$

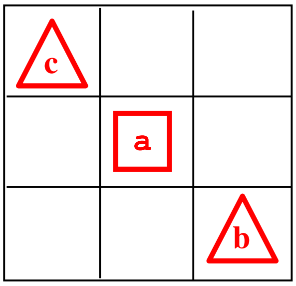
g) Apenas blocos grandes à direita do bloco **a** são cubos.

$$\forall x\ (\mathtt{Cube}(x) \rightarrow (\mathtt{Large}(x) \wedge \mathtt{RightOf}(x,a)))$$

h) Nenhum bloco está na mesma linha do bloco **a** nem na mesma linha do bloco **b**.

$$\neg\exists x\ (x \neq a \wedge \mathtt{SameRow}(x,a)) \wedge \neg\exists x\ (x \neq b \wedge \mathtt{SameRow}(x,b))$$

2. **(3.5 val)** Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3 × 3 casas) e desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições




```
1.  ∃x BackOf(x,a) ∧ ∃y FrontOf(y,a)
2.  ¬(¬Tet(c) ∨ Dodec(a))
3.  SameShape(c,b) ∧ ∃x ¬ SameShape(x,b)
4.  ¬ ∃x (x ≠ c ∧ SameCol(x,c)) ∧ Between(a,b,c)
5.  ∀x ((x ≠ a ∧ x ≠ b) → (x = c ∧ LeftOf(x,a))
```

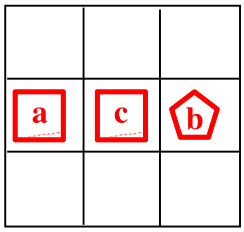
3. **(5.0 val)** Complete a demonstração abaixo indicada, indicando as fórmulas e as justificações em falta nas caixas em branco.

```
 1  | ¬ A ∨ B
 2  | D → ¬ A
 3  | B → C
    |----------
 4  |  | ¬ (¬ A ∨ (B ∧ C))
    |  |----------
 5  |  |  | ¬ A
    |  |  |----------
 6  |  |  | ¬ A ∨ (B ∧ C)        Intr ∨: 5
 7  |  |  | ⊥                    Intr ⊥: 4, 6
 8  |  | ¬ ¬ A                   Intr ¬: 5 - 7
 9  |  | A                       Elim ¬: 8
10  |  |  | ¬ A
    |  |  |----------
11  |  |  | ⊥                    Intr ⊥: 9, 10
12  |  |  | B                    Elim ⊥: 11
13  |  |  | B
    |  |  |----------
14  |  |  | B                    Reit : 13
15  |  | B                       Elim ∨ : 1, 10 - 12, 13 - 14
16  |  | C                       Elim →: 3, 15
17  |  | B ∧ C                   Intr ∧: 15, 16
18  |  | ¬ A ∨ (B ∧ C)           Intr ∨: 17
19  |  | ⊥                       Intr ⊥: 4, 18
20  | ¬ ¬ (¬ A ∨ (B ∧ C))        Intr ¬: 4 - 19
21  | ¬ A ∨ (B ∧ C)              Elim ¬: 20
```

4. **(2.5 val)** Considere o seguinte argumento e sua demonstração (usando a linguagem de Tarski).

   a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas. Esses passos invalidam a conclusão?

1.	Cube(c) → Cube(a)	
2.	Cube(c) → (Cube(a) ∨ Cube(b))	
3.	| Cube(c)	
4.	| Cube(a) ∨ Cube(b))	Elim →: 2, 3
5.	| | Cube(a)	
6.	| | ~~Cube(b)~~	Elim ∨: 4, 5
7.	| | Cube(b)	
8.	| | Cube(b)	Reit : 7
9.	| Cube(b)	Elim ∨ : 4, 5-6, 7-8
10.	| Cube(a)	Elim →: 1, 3
11.	Cube(c) ~~→ (Cube(a) ∧~~ Cube(b))	Intr →: 3 - 10



No passo 11, a fórmula não é obtida por introdução da implicação como é definida no sistema de Dedução Natural. No entanto, este erro não torna inválida a conclusão. De facto, se a fórmula `Cube(a) ∧ Cube(b)` fosse obtida por introdução da ∧ imediatamente após a linha 10, a fórmula final seria bem obtida por introdução da →.

O maior erro, e que invalida a conclusão, ocorre no passo 6, em que a eliminação da disjunção é mal invocada para justificação. De facto, não existe qualquer regra para concluir um dos disjuntos se o outro for verdadeiro.

   b) Indique no tabuleiro ao lado da demonstração, um contraexemplo que mostre que o argumento não é válido.

5. **(4.0 val)** Mostre que o argumento abaixo é válido, apresentando a respectiva demonstração.

1	A → (B ∨ C)	
2	¬ B	
3	| ¬ C	
4	| | A	
5	| | B ∨ C	Elim → : 1 , 4
6	| | | B	
7	| | | ⊥	Intr ⊥ : 2 , 6
8	| | | C	
9	| | | ⊥	Intr ⊥ : 3 , 8
10	| | ⊥	Elim ∨ : 5 , 6 – 7 , 8 – 9
11	| ¬ A	Intr ¬ : 4 – 10
12	¬ C → ¬ A	Intr → : 3 - 11