Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2017 / 18 – Exame Final

Grupos para Avaliar
(Todos por Omissão)

G1	G2	G3	G4

Nome:	**n.º:**

Grupo 1 (corresponde ao 1.º teste)

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases:

- A Tailândia e o Vietname são países da Ásia.
- A capital da Tailândia é Bangkok e a sua (da Tailândia) área é maior que a do Vietname.
- A Tailândia e o Vietname são vizinhos do Laos, mas não fazem fronteira entre si.

a) Apresente uma assinatura Σ = <NP, $NF_0 \cup NF_1$> de uma linguagem de 1.ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0: Constantes	*NF_1: Funções*	*NP: Predicados*
tailandia, vietname, laos asia, bangkok	capitalDe/1, areaDe/1,	Vizinhos/2, =/2, >/2, ContinenteDe/2

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) A Tailândia e o Vietname são países da Ásia.

```
continenteDe(tailandia, asia) ∧ continenteDe(vietname, asia)
```

ii) A capital da Tailândia é Bangcok e a sua (da Tailândia) área é maior que a do Viename.

```
capitalDe(tailandia) = bangcok ∧ areaDe(tailandia) > areaDe(vietname)
```

iii) A Tailândia e o Vietname são vizinhos do Laos, mas não fazem fronteira entre si.

```
Vizinhos(tailandia,laos) ∧ Vizinhos(vietname,laos) ∧ ¬Vizinhos(tailandia,vietname)
```

1.2. (2 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica; V-FO: Verdade Lógica; V-TW: Verdade Analítica (Tarski);
P-TT: Possibilidade Tautológica; P-FO: Possibilidade Lógica; P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski).

	V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
`¬ Cube(a) ∧ Cube(b) ∧ a = b`	N	N	N	S	N	N
`Tet(a) ∧ (Cube(a) ∨ Dodec(a))`	N	N	N	S	S	N
`(Cube(a) ∧ ¬ Cube(a)) → Dodec(a)`	S	S	S	S	S	S

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique (com S/N) se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ... , Premissa n } ⊨ Conclusão	**Val-TT**	**Val-FO**	**Val-TW**
`{ Cube(a) ∨ Tet(a) } ⊨ ¬ Dodec(a)`	N	N	S
`{ Tet(a), ¬Tet(b) } ⊨ a ≠ b`	N	S	S
`{ Cube(a), Dodec(a) } ⊨ Cube(a)`	S	S	S

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1:** $(\neg A \lor \neg B \lor C)$, **P2:** $A \leftrightarrow B$, e **Z:** $\neg C \to (\neg A \land \neg B)$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2** e **Z**.

A	B	C	¬ A	∨	¬ B	∨ C	A ↔ B	¬ C	→	(¬ A	∧	¬ B)
V	V	V	F	F	F	**V**	**V**	F	**V**	F	F	F
V	V	F	F	F	F	**F**	**V**	V	**F**	F	F	F
V	F	V	F	V	V	**V**	**F**	F	**V**	F	F	V
V	F	F	F	V	V	**V**	**F**	V	**F**	F	F	V
F	V	V	V	V	F	**V**	**F**	F	**V**	V	F	F
F	V	F	V	V	F	**V**	**F**	V	**F**	V	F	F
F	F	V	V	V	V	**V**	**V**	F	**V**	V	V	V
F	F	F	V	V	V	**V**	**V**	V	**V**	V	V	V

b) Por análise da tabela, indique justificando se a fórmula **Z** é ou não consequência tautológica da premissa **P1**, apenas. E das premissas **P1** e **P2**?

Justificação:

A fórmula **Z não é** consequência tautológica da premissa **P1** pois **C** é falsa em duas interpretações, $(A, \neg B, \neg C)$ **e** $(\neg A, B, \neg C)$, que tornam a premissa verdadeira.

No entanto, a fórmula **Z é** consequência tautológica das premissas **P1** e **P2** pois nas interpretações acima referidas a premissa **P2** é falsa, pelo que não existem interpretações que tornem ambas as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

1.5. (5 valores) Considere a fórmula $(A \leftrightarrow B) \land (C \to B)$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

$(A \leftrightarrow B) \land (C \to B)$

$\Leftrightarrow (A \to B) \land (B \to A) \land (C \to B)$ — Equivalência de $\leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A) \land (\neg C \lor B)$ — Equivalência de $\to$

Esta fórmula está em CNF e não pode ser simplificada.

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg C \lor B) \land (\neg B \lor A)$ — Comutatividade

$\Leftrightarrow ((\neg A \lor B) \land (\neg C \lor B)) \land (\neg B \lor A)$ — Associatividade

$\Leftrightarrow ((\neg A \land \neg C) \lor B) \land (\neg B \lor A)$ — Distribuição

$\Leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg B) \lor (\neg A \land \neg C \land A) \lor (B \land \neg B) \lor (B \land A)$ — Distribuição

$\Leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg B) \lor (F \land \neg C) \lor F \lor (B \land A)$ — Contradição (e Comutatividade)

$\Leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg B) \lor F \lor F \lor (B \land A)$ — Elemento Absorvente

$\Leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg B) \lor (B \land A)$ — Elemento Neutro

Esta fórmula já está em DNF e não podes ser simplificada.

Grupo 2

(corresponde ao 2.º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Um e apenas um dos blocos **a** e **b** é grande.

`(Large(a) ∨ Large(b)) ∧ ¬(Large(a) ∧ Large(b))`

b) Os blocos **a** e **b** são ambos tetraedros excepto se existir um dodecaedro **d**.

`¬Dodec(d) → (Tet(a) ∧ Tet(b))`

c) Um dos blocos **a** e **b** é um cubo e um deles é tetraedro.

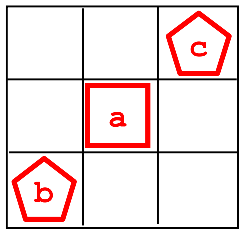
`(Cube(a) ∨ Cube(b)) ∧ (Tet(a) ∨ Tet(b))`

d) Dois dos blocos **a**, **b** e **c** estão na mesma linha.

`SameRow(a,b) ∨ SameRow(a,c) ∨ SameRow(b,c)`

2.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

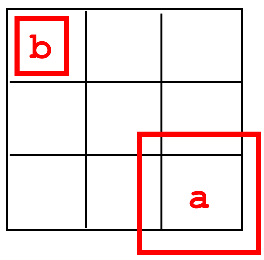
1. `¬Dodec(a) → Between(a,b,c)`
2. `BackOf(a,b) ∧ FrontOf(a,c)`
3. `Sameshape(b,c) ∧ ¬Sameshape(a,c)`
4. `Cube(a) ∧ ¬Tet(b)`
5. `¬LeftOf(a,c) → LeftOf(a,c)`



2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas.

1.	Cube(a) ∨ Cube(b)	
2.	Large(a) → Cube(a)	
3.	Cube(b)	
4.	~~¬ Cube(a)~~	Elim ∨ : 1 , 3
5.	Large(a)	
6.	Cube(a)	Elim →: 2 , 5
7.	⊥	Intr ⊥: 4 , 6
8.	¬Large(a)	Intr ¬ : 5 - 7
9.	Cube(b) → ¬Large(a)	Intr →: 3 - 8



Erro(s):

No passo **4** não se poderia ter inferido que b é um cubo, por eliminação da disjunção (ou por outra qualquer regra). De facto, a disjunção `Cube(a) ∨ Cube(b)` não é exclusiva e, portanto, se um dos disjuntos é verdadeiro, o outro também o pode ser!

Assim sendo, `b` pode ser um cubo, o que satisfaz as premissas, mas não a conclusão, como mostrado no contra-exemplo do tabuleiro ao lado.

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido.

2.4. **(4 val)** Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1	A → (B ↔ C)	
2	B ∨ C	
3.	¬(¬A ∨ B)	
4.	¬A	
5.	¬A ∨ B	Intr ∨ : 4
6.	⊥	Intr ⊥ : 3 , 5
7.	¬¬A	Intr ¬ : 4 - 6
8.	A	Elim ¬ : 7
9.	B ↔ C	Elim → : 1, 8
10.	B	
11.	¬A ∨ B	Intr ∨ : 10
12.	⊥	Intr ⊥ : 3 , 11
13.	C	
14.	B	Elim ↔ : 9, 13
15.	¬A ∨ B	Intr ∨ : 14
16.	⊥	Intr ⊥ : 3 , 15
17.	⊥	Elim ∨: 2 , 10 - 12, 13 - 16
18.	¬¬(¬A ∨ B)	Intr ¬ : 3 - 17
19.	¬ A ∨ B	Elim ¬ : 18

2.5. **(5 valores)** Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

1.	A ↔ (B → C)	
2.	¬B ∨ ¬C	
3.	A	
4.	B → C	Elim ↔ : 1 , 3
5.	B	
6.	C	Elim → : 4 , 5
7.	¬B	
8.	⊥	Intr ⊥ : 5 , 7
9.	¬C	
10.	⊥	Intr ⊥ : 6 , 9
11.	⊥	Elim ∨ : 2, 7 - 8, 9 - 10
12.	¬B	Intr ¬ : 5 - 11
13.	A → ¬B	Intr → : 3 - 12

Grupo 3

(corresponde ao 3.º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Alguns dodecaedros são maiores que outros.

∃x ∃x (Dodec(x) ∧ Dodec(y) ∧ Larger(x,y))

b) Os blocos pequenos são cubos a menos que tenham outros blocos na mesma coluna.

∀x (Small(x) ∧ ¬∃y (x ≠ y ∧ SameCol(x,y))) → Cube(x))

c) Os tetraedros grandes têm sempre um cubo na mesma linha.

∀x ((Tet(x) ∧ Large(x)) → ∃y (Cube(y) ∧ SameRow(x,y)))

d) Se dois blocos estão juntos (*adjoined*), pelo menos um deles é um dodecaedro.

∀x ∀y (Adjoins(x,y) → (Dodec(x) ∨ Dodec(y)))

e) Os blocos médios estão todos em linhas diferentes.

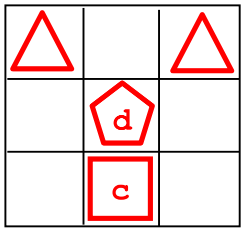
∀x ∀y ((Medium(x) ∧ Medium(y) ∧ x ≠ y) → ¬ SameRow(x,y))

f) Todos os tetraedros à frente de algum cubo são grandes.

∀x ((Tet(x) ∧ ∃y (Cube(y) ∧ FrontOf(x,y))) → Large(x))

3.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1. Dodec(d) ∧ Cube(c)
2. ¬∃x ∃y ∃z Between(x,y,z)
3. ∀x ∀y ((Cube(x) ∧ x ≠ y) → FrontOf(x,y))
4. ∃x ∃y (Tet(x) ∧ Tet(y) ∧ SameRow(x,y) ∧ ¬Adjoins(x,y))
5. ¬ ∃x (Cube(x) ∧ ¬ SameCol(x,d))
6. ∀x ∀y ((Tet(x) ∧ Dodec(y)) → BackOf(x,y))



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1	∃x Medium(x)
2	∀x (Cube(x)→ Large(x))
3	¬ ∀x (¬ Tet(x) ∧ ¬ Dodec(x))

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

☐ ∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))

☒ ¬ ∃x (Large(x) ∧ Medium(x))

☐ ¬ ∃x (Large(x) ∧ Small (x))

☐ ¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))

☒ ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))

☐ ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))

☐ ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))

☐ ¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

```
1.  | ∀x ∀y ((Cube(x) ∧ Dodec(y)) → FrontOf(x,y))
2.  | ¬∃x∃y FrontOf(x,y)
    |----------------------------------------
3.  | | ∃x Cube(x)
    | |--------------------------------------
4.  | | | a: Cube(a)
    | | |------------------------------------
5.  | | | | ∃y Dodec(y)
    | | | |----------------------------------
6.  | | | | | b : Dodec(b)
    | | | | |--------------------------------
7.  | | | | | Cube(a) ∧ Dodec(b)                     Intr ∧: 4, 6
8.  | | | | | ∀y((Cube(a) ∧ Dodec(y))→ FrontOf(a,y))  Elim ∀: 1
9.  | | | | | (Cube(a) ∧ Dodec(b)) → FrontOf(a,b)    Elim ∀: 8
10. | | | | | FrontOf(a,b)                           Elim →: 7, 9
11. | | | | | ∃y FrontOf (a,y)                       Intr ∃: 10
12. | | | | | ∃x ∃y FrontOf (x,y)                    Intr ∃: 11
13. | | | | | ⊥                                      Intr ⊥: 2, 12
14. | | | | ⊥                                        Elim ∃: 5, 6 - 13
15. | | | ¬∃y Dodec(y)                             Intr ¬: 5 - 14
16. | | ¬∃y Dodec(y)                               Elim ∃: 3, 4 - 15
17. | ∃x Cube(x)→¬∃y Dodec(y)                      Intr →: 3 - 16
```

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

```
1.  | ∃x (Cube(x) ∧∀y (Dodec(y) → Larger(y,x)))
2.  | ∀x ∀y ¬Larger(x,y)
    |----------------------------------------
3.  | | ∃x Dodec(x)
    | |--------------------------------------
4.  | | | d: Dodec(d)
    | | |------------------------------------
5.  | | | | c: Cube(c) ∧∀y (Dodec(y) → Larger(y,c))
    | | | |----------------------------------
6.  | | | | ∀y (Dodec(y) → Larger(y,c))          Elim ∧: 5
7.  | | | | Dodec(d) → Larger(d,c)               Elim ∀: 6
8.  | | | | Larger(d,c)                          Elim →: 4 , 7
9.  | | | | ∀y ¬Larger(d,y)                      Elim ∀: 2
10. | | | | ¬Larger(d,c)                         Elim ∀: 9
11. | | | | ⊥                                    Intr ⊥: 8 , 10
12. | | | ⊥                                      Elim ∃: 1, 5 - 11
13. | | ⊥                                        Elim ∃: 3, 4 - 12
14. | ¬∃x Dodec(x)                               Intr ¬: 3 - 13
```

Grupo 4

(corresponde ao 4.º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível. Existe mais do que uma interpretação que satisfaça S ? Justifique.

1. $T \to C$	5. $T \to A$
2. $(C \land D) \to F$	6. $(E \land F) \to \bot$
3. $(B \land C) \to D$	7. $(A \land E) \to G$
4. $(A \land D) \to E$	8. $(A \land C) \to B$

Resposta: Pela cláusula 1: `C = True` e, pela cláusula 5, `A = True`. Pela cláusula **8**, será `B = True`. Logo pela cláusula **3** será `D = True`. Então, a cláusula **2** impõe `F = True` enquanto a cláusula **4** impõe `F = True`. Em consequência, a cláusula **6** impões ⊥ `= True`, o que é impossível, pelo que as cláusulas Horn não são satisfazíveis, não havendo pois nenhuma interpretação que as satisfaça.

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional (já apresentado no problema 2.4)

P1	$A \to (B \leftrightarrow C)$
P2	$B \lor C$
X	$\neg A \lor B$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

1.	$\neg A \lor B \lor \neg C$	(P1)
2.	$\neg A \lor \neg B \lor C$	(P1)
3.	$B \lor C$	(P2)
4.	A	(¬X)
5.	$\neg B$	(¬X)

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

6.	C	Res 5 , 3
7.	$\neg A \lor B$	Res 6 , 1
8.	$\neg A$	Res 7 , 5
9.	$\square$	Res 8 , 4

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) $\forall x\ ((Tet(x) \land \exists y\ FrontOf(y,x)) \to \exists z\ Larger(z,x))$

$\forall x\ \forall y\ \exists z\ (\neg Tet(x) \lor \neg FrontOf(y,x) \lor Larger(z,x))$

b) $\forall x\ (Cube(x) \to \forall y\ (Tet(y) \to \neg\exists z\ Between(z,x,y)))$

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (\neg Cube(x) \lor \neg Tet(y) \lor \neg Between(z,x,y))$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \neg\ (Large(x) \to (Adjoins(y,x) \land SameSize(z,x)))$

1. Large(x1)
2. ¬Adjoins(y2,x2) ∨ SameSize(f(x2),x2)

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem (idêntico ao apresentado no problema 3.5)

P1	∃x (Cube(x) ∧ ∀y (Dodec(y) → Larger(y,x)))
P2	∀x ∀y ¬Larger(y,x)
C	¬∃x Dodec(x)

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

1. Cube(a)	de P1
2. ¬ Dodec(y2) ∨ Larger(y2,a)	de P1
3. ¬ Larger(x3,y3)	de P2
4. Dodec(d)	de ¬C

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

5. Larger(d,a)	Res 4, 2 {y2 / d}
6. □	Res 5, 3 {x3 / d, y3 / a}

4.6. (5 valores) Mostre que todos os números na sequência $S(n) = 5^n+2\times11^n$ (para qualquer $n \geq 0$) são todos múltiplos de 3.

Passo Base : $S(0) = 5^0+2\times11^0$

Para $n = 0$ temos

$S(0) = 5^0+2\times11^0 = 1+2 = 3$, que é um múltiplo de 3.

Passo de Indução :

$S(n) = 5^n+2\times11^n = 3p \Rightarrow \quad S(n+1) = 5^{n+1}+2\times11^{n+1} = 3q$

De facto temos

$S(n+1) = 5^{n+1}+ 2\times11^{n+1}$

$= 5^n*5 + 2\times11^n*11$ Regra da potência (expoente é uma soma)

$= 5^n*5 + 2\times11^n*5 + 2\times11^n*6$ Propriedade Distribuitiva

$= 5(5^n + 2\times11^n)+ 2\times11^n*6$ Propriedade Distribuitiva

$= 5*3p + 12\times11^n$ Substituição

$= 3(5p + 4*11^n)$ Propriedade Distribuitiva

$= 3q$ Substituição

com $q = 5p + 4*11^n$

q.e.d