Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2017 / 18 – Exame Final

Grupos para Avaliar
(Todos por Omissão)

G1	G2	G3	G4

Nome:	n.º:

Grupo 1 (corresponde ao 1.º teste)

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases:

- A Tailândia e o Vietname são países da Ásia.
- A capital da Tailândia é Bangkok e a sua (da Tailândia) área é maior que a do Vietname.
- A Tailândia e o Vietname são vizinhos do Laos, mas não fazem fronteira entre si.

a) Apresente uma assinatura $\Sigma = <NP, NF_0 \cup NF_1>$ de uma linguagem de 1.ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0: Constantes	*NF_1: Funções*	*NP: Predicados*

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) A Tailândia e o Vietname são países da Ásia.

ii) A capital da Tailândia é Bangcok e a sua (da Tailândia) área é maior que a do Viename.

iii) A Tailândia e o Vietname são vizinhos do Laos, mas não fazem fronteira entre si.

1.2. (2 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica; V-FO: Verdade Lógica; V-TW: Verdade Analítica (Tarski);
P-TT: Possibilidade Tautológica; P-FO: Possibilidade Lógica; P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski).

	V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
`¬ Cube(a) ∧ Cube(b) ∧ a = b`						
`Tet(a) ∧ (Cube(a) ∨ Dodec(a))`						
`(Cube(a) ∧ ¬ Cube(a)) → Dodec(a)`						

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique (com S/N) se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ... , Premissa n } ⊨ Conclusão	Val-TT	Val-FO	Val-TW
`{ Cube(a) ∨ Tet(a) } ⊨ ¬ Dodec(a)`			
`{ Tet(a), ¬Tet(b) } ⊨ a ≠ b`			
`{ Cube(a), Dodec(a) } ⊨ Cube(a)`			

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1:** $(\neg A \lor \neg B \lor C)$, **P2:** $A \leftrightarrow B$, e **Z:** $\neg C \rightarrow (\neg A \land \neg B)$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2** e **Z**.

A	B	C	$\neg A \lor \neg B \lor C$	$A \leftrightarrow B$	$\neg C \rightarrow (\neg A \land \neg B)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

b) Por análise da tabela, indique justificando se a fórmula **Z** é ou não consequência tautológica da premissa **P1**, apenas. E das premissas **P1** e **P2**?

Justificação:

1.5. **(5 valores)** Considere a fórmula $(A \leftrightarrow B) \land (C \rightarrow B)$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

Grupo 2

(corresponde ao 2.º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Um e apenas um dos blocos **a** e **b** é grande.

b) Os blocos **a** e **b** são ambos tetraedros excepto se existir um dodecaedro **d**.

c) Um dos blocos **a** e **b** é um cubo e um deles é tetraedro.

d) Dois dos blocos **a**, **b** e **c** estão na mesma linha.

2.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

```
1. ¬Dodec(a) → Between(a,b,c)
2. BackOf(a,b) ∧ FrontOf(a,c)
3. Sameshape(b,c) ∧ ¬Sameshape(a,c)
4. Cube(a) ∧ ¬Tet(b)
5. ¬LeftOf(a,c) → LeftOf(a,c)
```

2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas.

```
1. | Cube(a) ∨ Cube(b)
2. | Large(a) → Cube(a)
   |-------------------------------
3. | | Cube(b)
   | |---------
4. | | ¬ Cube(a)              Elim ∨ : 1 , 3
5. | | | Large(a)
   | | |---------
6. | | | Cube(a)            Elim →: 2 , 5
7. | | | ⊥                  Intr ⊥: 4 , 6
8. | | ¬Large(a)              Intr ¬ : 5 - 7
9. | Cube(b) → ¬Large(a)      Intr →: 3 - 8
```

Erro(s):

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido.

2.4. (4 val) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1	$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$	
2	$B \vee C$	
3.		
4.	$\neg A$	
5.	$\neg A \vee B$	
6.		Intr $\perp$: 3 , 5
7.	$\neg\neg A$	Intr $\neg$: 4 - 6
8.	A	Elim $\neg$: 7
9.		Elim $\rightarrow$: 1, 8
10.	B	
11.	$\neg A \vee B$	Intr $\vee$: 10
12.	$\perp$	Intr $\perp$: 3 , 11
13.	C	
14.	B	
15.	$\neg A \vee B$	Intr $\vee$: 14
16.	$\perp$	Intr $\perp$: 3 , 15
17.	$\perp$	
18.		Intr $\neg$: 3 - 17
19.	$\neg A \vee B$	

2.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

1.	$A \leftrightarrow (B \rightarrow C)$
2.	$\neg B \vee \neg C$
	$A \rightarrow \neg B$

Grupo 3

(corresponde ao 3.º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Alguns dodecaedros são maiores que outros.

b) Os blocos pequenos são cubos a menos que tenham outros blocos na mesma coluna.

c) Os tetraedros grandes têm sempre um cubo na mesma linha.

d) Se dois blocos estão juntos (*adjoined*), pelo menos um deles é um dodecaedro.

e) Os blocos médios estão todos em linhas diferentes.

f) Todos os tetraedros à frente de algum cubo são grandes.

3.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1. **Dodec(d) ∧ Cube(c)**
2. **¬∃x ∃y ∃z Between(x,y,z)**
3. **∀x ∀y ((Cube(x) ∧ x ≠ y) → FrontOf(x,y))**
4. **∃x ∃y (Tet(x) ∧ Tet(y) ∧ SameRow(x,y) ∧ ¬Adjoins(x,y))**
5. **¬ ∃x (Cube(x) ∧ ¬ SameCol(x,d))**
6. **∀x ∀y ((Tet(x) ∧ Dodec(y)) → BackOf(x,y))**

3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1	**∃x Medium(x)**
2	**∀x (Cube(x)→ Large(x))**
3	**¬ ∀x (¬ Tet(x) ∧ ¬ Dodec(x))**

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☐ **∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Large(x) ∧ Medium(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Large(x) ∧ Small (x))**
- ☐ **¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))**
- ☐ **∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))**

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

```
 1. | ∀x ∀y ((Cube(x) ∧ Dodec(y)) → FrontOf(x,y))
 2. | ¬∃x∃y FrontOf(x,y)
    |-------------------------------------------
 3. | | [          ]
    | |-------------------------------------
 4. | | | a: Cube(a)
    | | |-----------------------------------
 5. | | | | ∃y Dodec(y)
    | | | |---------------------------------
 6. | | | | | [          ]
    | | | | |-------------------------------
 7. | | | | | Cube(a) ∧ Dodec(b)                        Intr ∧: 4, 6
 8. | | | | | ∀y((Cube(a) ∧ Dodec(y))→ FrontOf(a,y))    [          ]
 9. | | | | | (Cube(a) ∧ Dodec(b)) → FrontOf(a,b)       Elim ∀: 8
10. | | | | | FrontOf(a,b)                              Elim →: 7, 9
11. | | | | | ∃y FrontOf (a,y)                          [          ]
12. | | | | | ∃x ∃y FrontOf (x,y)                       Intr ∃: 11
13. | | | | | [          ]                              Intr ⊥: 2, 12
14. | | | | ⊥                                           [          ]
15. | | | ¬∃y Dodec(y)                                  [          ]
16. | | [          ]                                    Elim ∃: 3, 4 - 15
17. | ∃x Cube(x)→¬∃y Dodec(y)                         Intr →: 3 - 16
```

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

```
1. | ∃x (Cube(x) ∧∀y (Dodec(y) → Larger(y,x)))
2. | ∀x ∀y ¬Larger(x,y)
   |-------------------------------------------
   |
   |
   |
   | ¬∃x Dodec(x)
```

Grupo 4

(corresponde ao 4.º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível. Existe mais do que uma interpretação que satisfaça S ? Justifique.

1. $T \rightarrow C$	5. $T \rightarrow A$
2. $(C \wedge D) \rightarrow F$	6. $(E \wedge F) \rightarrow \perp$
3. $(B \wedge C) \rightarrow D$	7. $(A \wedge E) \rightarrow G$
4. $(A \wedge D) \rightarrow E$	8. $(A \wedge C) \rightarrow B$

Resposta:

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional (já apresentado no problema 2.4)

P1	$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$
P2	$B \vee C$
X	$\neg A \vee B$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) $\forall x\ ((Tet(x) \wedge \exists y\ FrontOf(y,x)) \rightarrow \exists z\ Larger(z,x))$

b) $\forall x\ (Cube(x) \rightarrow \forall y\ (Tet(y) \rightarrow \neg\exists z\ Between(z,x,y)))$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \neg\ (Large(x) \rightarrow (Adjoins(y,x) \wedge SameSize(z,x)))$

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem (idêntico ao apresentado no problema 3.5)

P1	$\exists x\ (Cube(x) \land \forall y\ (Dodec(y) \rightarrow Larger(y,x)))$
P2	$\forall x\ \forall y\ \neg Larger(y,x)$
C	$\neg \exists x\ Dodec(x)$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.6. (5 valores) Mostre que todos os números na sequência $S(n) = 5^n+2\times 11^n$ (para qualquer $n \geq 0$) são todos múltiplos de 3.

Passo Base :

Passo de Indução :