

# Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2017 / 18 – Exame Final

Grupos para Avaliar

(Todos por Omissão)

G1

G2

G3

G4

Nome:

n.º:

## Grupo 1 (corresponde ao 1.º teste)

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases:

- A Tailândia e o Vietname são países da Ásia.
- A capital da Tailândia é Bangkok e a sua (da Tailândia) área é maior que a do Vietname.
- A Tailândia e o Vietname são vizinhos do Laos, mas não fazem fronteira entre si.

a) Apresente uma assinatura  $\Sigma = \langle NP, NF_0 \cup NF_1 \rangle$  de uma linguagem de 1.ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

$NF_0$ : Constantes	$NF_1$ : Funções	NP: Predicados

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) A Tailândia e o Vietname são países da Ásia.

ii) A capital da Tailândia é Bangkok e a sua (da Tailândia) área é maior que a do Vietname.

iii) A Tailândia e o Vietname são vizinhos do Laos, mas não fazem fronteira entre si.

1.2. (2 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica;

V-FO: Verdade Lógica;

V-TW: Verdade Analítica (Tarski);

P-TT: Possibilidade Tautológica;

P-FO: Possibilidade Lógica;

P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski).

- $\neg \text{Cube}(\mathbf{a}) \wedge \text{Cube}(\mathbf{b}) \wedge \mathbf{a} = \mathbf{b}$
- $\text{Tet}(\mathbf{a}) \wedge (\text{Cube}(\mathbf{a}) \vee \text{Dodec}(\mathbf{a}))$
- $(\text{Cube}(\mathbf{a}) \wedge \neg \text{Cube}(\mathbf{a})) \rightarrow \text{Dodec}(\mathbf{a})$

V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique (com S/N) se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ..., Premissa n}  $\models$  Conclusão

- {  $\text{Cube}(\mathbf{a}) \vee \text{Tet}(\mathbf{a})$  }  $\models \neg \text{Dodec}(\mathbf{a})$
- {  $\text{Tet}(\mathbf{a}), \neg \text{Tet}(\mathbf{b})$  }  $\models \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$
- {  $\text{Cube}(\mathbf{a}), \text{Dodec}(\mathbf{a})$  }  $\models \text{Cube}(\mathbf{a})$

Val-TT	Val-FO	Val-TW

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1**:  $(\neg A \vee \neg B \vee C)$ , **P2**:  $A \leftrightarrow B$ , e **Z**:  $\neg C \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ .

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2** e **Z**.

A	B	C	$\neg A \vee \neg B \vee C$	$A \leftrightarrow B$	$\neg C \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

b) Por análise da tabela, indique justificando se a fórmula **Z** é ou não consequência tautológica da premissa **P1**, apenas. E das premissas **P1** e **P2**?

**Justificação:**

1.5. (5 valores) Considere a fórmula  $(A \leftrightarrow B) \wedge (C \rightarrow B)$ . Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

## Grupo 2

(corresponde ao 2.º teste)

**2.1. (4 valores)** Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Um e apenas um dos blocos **a** e **b** é grande.

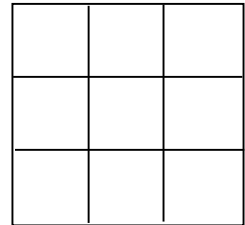
b) Os blocos **a** e **b** são ambos tetraedros excepto se existir um dodecaedro **d**.

c) Um dos blocos **a** e **b** é um cubo e um deles é tetraedro.

d) Dois dos blocos **a**, **b** e **c** estão na mesma linha.

**2.2. (4 valores)** Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de  $3 \times 3$  casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

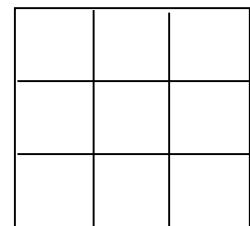
1.  $\neg \text{Dodec}(a) \rightarrow \text{Between}(a, b, c)$
2.  $\text{BackOf}(a, b) \wedge \text{FrontOf}(a, c)$
3.  $\text{Sameshape}(b, c) \wedge \neg \text{Sameshape}(a, c)$
4.  $\text{Cube}(a) \wedge \neg \text{Tet}(b)$
5.  $\neg \text{LeftOf}(a, c) \rightarrow \text{LeftOf}(a, c)$



**2.3. (3 valores)** Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas.

1.	$\text{Cube}(a) \vee \text{Cube}(b)$	
2.	$\text{Large}(a) \rightarrow \text{Cube}(a)$	
3.	$\text{Cube}(b)$	
4.	$\neg \text{Cube}(a)$	<b>Elim <math>\vee</math> : 1 , 3</b>
5.	$\text{Large}(a)$	
6.	$\text{Cube}(a)$	<b>Elim <math>\rightarrow</math> : 2 , 5</b>
7.	$\perp$	<b>Intr <math>\perp</math> : 4 , 6</b>
8.	$\neg \text{Large}(a)$	<b>Intr <math>\neg</math> : 5 - 7</b>
9.	$\text{Cube}(b) \rightarrow \neg \text{Large}(a)$	<b>Intr <math>\rightarrow</math> : 3 - 8</b>



**Erro(s):**

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido.

2.4. (4 val) Complete a demonstr ao abaixo no sistema de Dedu ao Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1	$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$		
2	$B \vee C$		
3.	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%;"></div>		
4.	$\neg A$		
5.	$\neg A \vee B$		
6.	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%;"></div>		Intr $\perp$ : 3 , 5
7.	$\neg\neg A$		Intr $\neg$ : 4 - 6
8.	$A$		Elim $\neg$ : 7
9.	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%;"></div>		Elim $\rightarrow$ : 1, 8
10.	$B$		
11.	$\neg A \vee B$		Intr $\vee$ : 10
12.	$\perp$		Intr $\perp$ : 3 , 11
13.	$C$		
14.	$B$		
15.	$\neg A \vee B$		Intr $\vee$ : 14
16.	$\perp$		Intr $\perp$ : 3 , 15
17.	$\perp$		
18.	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%;"></div>		Intr $\neg$ : 3 - 17
19.	$\neg A \vee B$		

2.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstr ao no sistema de Dedu ao Natural

1.	$A \leftrightarrow (B \rightarrow C)$	
2.	$\neg B \vee \neg C$	
	$A \rightarrow \neg B$	

## Grupo 3

(corresponde ao 3.º teste)

**3.1. (5 valores)** Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Alguns dodecaedros são maiores que outros.

b) Os blocos pequenos são cubos a menos que tenham outros blocos na mesma coluna.

c) Os tetraedros grandes têm sempre um cubo na mesma linha.

d) Se dois blocos estão juntos (*adjoined*), pelo menos um deles é um dodecaedro.

e) Os blocos médios estão todos em linhas diferentes.

f) Todos os tetraedros à frente de algum cubo são grandes.

**3.2. (4 valores)** Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de  $3 \times 3$  casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1.  $\text{Dodec}(d) \wedge \text{Cube}(c)$

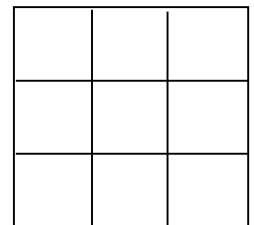
2.  $\neg \exists x \exists y \exists z \text{ Between}(x, y, z)$

3.  $\forall x \forall y ((\text{Cube}(x) \wedge x \neq y) \rightarrow \text{FrontOf}(x, y))$

4.  $\exists x \exists y (\text{Tet}(x) \wedge \text{Tet}(y) \wedge \text{SameRow}(x, y) \wedge \neg \text{Adjoins}(x, y))$

5.  $\neg \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \neg \text{SameCol}(x, d))$

6.  $\forall x \forall y ((\text{Tet}(x) \wedge \text{Dodec}(y)) \rightarrow \text{BackOf}(x, y))$



**3.3. (2 valores)** O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1	$\exists x \text{ Medium}(x)$
2	$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Large}(x))$
3	$\neg \forall x (\neg \text{Tet}(x) \wedge \neg \text{Dodec}(x))$

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- $\forall x (\text{Large}(x) \vee \text{Medium}(x) \vee \text{Small}(x))$
- $\neg \exists x (\text{Large}(x) \wedge \text{Medium}(x))$
- $\neg \exists x (\text{Large}(x) \wedge \text{Small}(x))$
- $\neg \exists x (\text{Medium}(x) \wedge \text{Small}(x))$
- $\forall x (\text{Tet}(x) \vee \text{Cube}(x) \vee \text{Dodec}(x))$
- $\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Cube}(x))$
- $\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Dodec}(x))$
- $\neg \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Dodec}(x))$

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

1.	$\forall x \forall y ((\text{Cube}(x) \wedge \text{Dodec}(y)) \rightarrow \text{FrontOf}(x,y))$	
2.	$\neg \exists x \exists y \text{FrontOf}(x,y)$	
3.	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%;"></div>	
4.	$a: \text{Cube}(a)$	
5.	$\exists y \text{Dodec}(y)$	
6.	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%;"></div>	
7.	$\text{Cube}(a) \wedge \text{Dodec}(b)$	Intr $\wedge$ : 4, 6
8.	$\forall y ((\text{Cube}(a) \wedge \text{Dodec}(y)) \rightarrow \text{FrontOf}(a,y))$	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%;"></div>
9.	$(\text{Cube}(a) \wedge \text{Dodec}(b)) \rightarrow \text{FrontOf}(a,b)$	Elim $\forall$ : 8
10.	$\text{FrontOf}(a,b)$	Elim $\rightarrow$ : 7, 9
11.	$\exists y \text{FrontOf}(a,y)$	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%;"></div>
12.	$\exists x \exists y \text{FrontOf}(x,y)$	Intr $\exists$ : 11
13.	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%;"></div>	Intr $\perp$ : 2, 12
14.	$\perp$	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%;"></div>
15.	$\neg \exists y \text{Dodec}(y)$	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%;"></div>
16.	<div style="border: 1px solid black; height: 20px; width: 100%;"></div>	Elim $\exists$ : 3, 4 - 15
17.	$\exists x \text{Cube}(x) \rightarrow \neg \exists y \text{Dodec}(y)$	Intr $\rightarrow$ : 3 - 16

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

1.	$\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \forall y (\text{Dodec}(y) \rightarrow \text{Larger}(y,x)))$	
2.	$\forall x \forall y \neg \text{Larger}(x,y)$	
	$\neg \exists x \text{Dodec}(x)$	

## Grupo 4

(corresponde ao 4.º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível. Existe mais do que uma interpretação que satisfaça S? Justifique.

1.  $T \rightarrow C$

2.  $(C \wedge D) \rightarrow F$

3.  $(B \wedge C) \rightarrow D$

4.  $(A \wedge D) \rightarrow E$

5.  $T \rightarrow A$

6.  $(E \wedge F) \rightarrow \perp$

7.  $(A \wedge E) \rightarrow G$

8.  $(A \wedge C) \rightarrow B$

Resposta:

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional (já apresentado no problema 2.4)

P1	$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$
P2	$B \vee C$
X	$\neg A \vee B$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a)  $\forall x ((\text{Tet}(x) \wedge \exists y \text{FrontOf}(y,x)) \rightarrow \exists z \text{Larger}(z,x))$

b)  $\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \forall y (\text{Tet}(y) \rightarrow \neg \exists z \text{Between}(z,x,y)))$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$\forall x \forall y \exists z \neg (\text{Large}(x) \rightarrow (\text{Adjoins}(y,x) \wedge \text{SameSize}(z,x)))$

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem (idêntico ao apresentado no problema 3.5)

P1	$\exists x (Cube(x) \wedge \forall y (Dodec(y) \rightarrow Larger(y, x)))$
P2	$\forall x \forall y \neg Larger(y, x)$
C	$\neg \exists x Dodec(x)$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.6. (5 valores) Mostre que todos os números na sequência  $s(n) = 5^n + 2 \times 11^n$  (para qualquer  $n \geq 0$ ) são todos múltiplos de 3.

**Passo Base :**

**Passo de Indução :**