Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2016/ 17 – 4º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**nº:**

1. **(2.5 vals)** Considere o conjunto *S* de cláusulas Horn abaixo.

1. D → B	6. (C ∧ Q) → A
2. ⊤ → M	7. (D ∧ N) → ⊥
3. (M ∧ Q) → A	8. (A ∧ Q) → M
4. (P ∧ Q) → C	9. (A ∧ M) → P
5 M → Q	10. (C ∧ P) → N

a) Mostre que o conjunto é satisfazível, indicando com = **T** ou = **F** o valor de verdade dos átomos numa interpretação que satisfaça as cláusulas de S .

A = T (3)	**B = T/F**	**C = T (4)**	**D = F (7)**
M = T (2)	**N = T (10)**	**P = T (9)**	**Q = T (5)**

b) Adicione uma cláusula de Horn, do tipo **A** → **X**, em que **X** é um dos átomos anteriores (i.e. um dos átomos A a Q) que torne o conjunto insatisfazível. Justifique.

> **X = D** ; Justificação: Pela alínea anterior, a proposição **D** tem de ser falsa (a proposição **B** pode ser verdadeira ou falsa - se se impuser **B** verdadeira, o sistema mantém-se satisfazível). Assim, para o tornar insatisfazível deverá ser **X = D**, i.e. juntar a cláusula **A → D**.

2. **(3.5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	(A ∧ B) ↔ (C ∨ D)
P2	B → D
P3	B ∨ C
Z	A ∧ D

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão (Z) na forma clausal.

1.	¬A ∨ ¬B ∨ C ∨ D	de P1
2.	A ∨ ¬C	de P1
3.	A ∨ ¬D	de P1
4.	B ∨ ¬C	de P1
5.	B ∨ ¬D	de P1
6.	¬B ∨ D	de P2
7.	B ∨ C	de P3
8.	¬A ∨ ¬D	de ¬Z

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

9.	¬D	Res 8, 3
10.	¬B	Res 9, 6
11.	C	Res 10, 7
12.	B	Res 11, 4
13.	□	Res 12, 10

3. **(2 vals)** Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Não há cubos que estejam na mesma linha a menos que tenham o mesmo tamanho.

$\forall x\ \forall y\ ((\mathrm{Cube}(x) \land \mathrm{Cube}(y) \land \neg \mathrm{SameSize}(x,y)) \rightarrow \neg \mathrm{SameRow}(x,y))$

b) Existe um objecto que está atrás de pelo menos dois cubos.

$\exists x\ \exists y\ \exists z\ (\mathrm{Cube}(y) \land \mathrm{Cube}(z) \land y \neq z \land \mathrm{BackOf}(x,y) \land \mathrm{BackOf}(x,z))$

c) Todos os tetraedros grandes são dodecaedros.

$\forall x\ ((\mathrm{Tet}(x) \land \mathrm{Large}(x)) \rightarrow \mathrm{Dodec}(x))$

d) Todos os blocos que são os mais à esquerda na sua linha são cubos.

$\forall x\ (\neg\exists y\ (\mathrm{SameRow}(y,x) \land \mathrm{LeftOf}(y,x)) \rightarrow \mathrm{Cube}(x))$

e) Existe um e um só tetraedro (Sugestão: Utilize o predicado de igualdade).

$\exists x\ (\mathrm{Tet}(x) \land \forall y\ (\mathrm{Tet}(y) \rightarrow y = x))$

4. **(1.5 vals)** Converta as fórmulas para a forma Prenex com a matriz na forma normal conjuntiva (CNF).

a) $\forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow (\mathrm{Large}(x) \land \neg\forall y\ \mathrm{SameRow}(y,x)))$

$\forall x\ \exists y\ ((\neg \mathrm{Cube}(x) \lor \mathrm{Large}(x)) \land (\neg \mathrm{Cube}(x) \lor \neg \mathrm{SameRow}(y,x)))$

b) $\exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \land \neg\forall y\ (\mathrm{Large}(y) \rightarrow \mathrm{Adjoins}(y,x)))$

$\exists x\ \exists y\ (\mathrm{Cube}(x) \land \mathrm{Large}(y) \land \neg \mathrm{Adjoins}(y,x))$

c) $\exists x\ \mathrm{Cube}(x) \rightarrow \forall y\ \mathrm{Large}(y)$

$\forall x\ \forall y\ (\neg \mathrm{Cube}(x) \lor \mathrm{Large}(y))$

5. **(2 vals)** Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, as seguintes fórmulas Prenex:

a) $\exists u\ \exists v\ \forall x\ \forall y\ ((\mathrm{Cube}(u) \rightarrow \mathrm{Small}(v)) \land (\mathrm{Small}(x) \rightarrow \mathrm{Cube}(y)))$

1. $\neg \mathrm{Cube}(a) \lor \mathrm{Small}(b)$
2. $\neg \mathrm{Small}(x2) \lor \mathrm{Cube}(y2)$

b) $\forall x\ \exists y\ ((\mathrm{Tet}(x) \lor \neg \mathrm{Larger}(x,y)) \rightarrow \mathrm{Between}(a,x,y))$

1. $\neg \mathrm{Tet}(x1) \lor \mathrm{Between}(a,x1,f(x1))$
2. $\mathrm{Larger}(x2,f(x2)) \lor \mathrm{Between}(a,x2,f(x2))$

6. **(1 val)** Obtenha a substituição mais geral **σ** que unifique os dois termos abaixo. Indique qual o termo obtido quando se aplica essa substituição a qualquer um dos termos unificados.

T1 : $\mathrm{FrontOf}(x,\ g(x,y))$ T2 : $\mathrm{FrontOf}(f(z),w)$

substituição $\sigma = \{\ x/\ f(z),\ w/g(f(z),y)\ \}$

$T1\ \sigma\ =\ T2\ \sigma\ =\ \mathrm{FrontOf}(f(z),g(f(z),y))$

7. **(5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

```
P1 | ¬∃x ∃y (¬(Large(x) ∧ Large(y)) ∧ Adjoins(x,y))
P2 | ∀x (∃y Adjoins(x,y) → (Small(x) ∨ Dodec(x)))
P3 | ∀x (Small(x) → ¬Large(x))
   |-------------------------------------------
 C | ∀x ∀y (Adjoins(x,y) → Dodec(x))
```

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

```
1. Large(x1) ∨ ¬Adjoins(x1,y1)                de P1
2. Large(y2) ∨ ¬Adjoins(x2,y2)                de P1
3. ¬Adjoins(x3,y3) ∨ Small(x3) ∨ Dodec(x3)    de P2
4.  ¬Small(x4) ∨ ¬Large(x4)                   de P3
5. ¬Dodec(a)                                  de ¬C
6. Adjoins(a,b)                               de ¬C
```

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

```
 7. Small(a) ∨ Dodec(a)        Res  6,3  {x3/a, y3/b}
 8. Small(a)                   Res  7,5  {}
 9. ¬Large(a)                  Res  8,4  {x4/a}
10. ¬Adjoins(a,y1)             Res  9,1  {x1/a}
11.  □                         Res 10,6  {y1/b}
```

8. **(2.5 vals)** Notando que os números 8^1-3^1 = 5, 8^2-3^2 = 64 – 9 = 55 e 8^3-3^3 = 512-27 = 485 são todos divisíveis por 5, prove por indução sobre os números naturais, que o número 8^n-3^n é divisível por 5 para qualquer número natural n ≥ 1.

Passo Base:

Para n = 1 confirmamos que $8^1-3^1 = 5$ é divisível por 5.

Passo de Indução: $8^n-3^n = 5*i \Rightarrow 8^{n+1}-3^{n+1} = 5*j$

$8^{n+1}-3^{n+1}$	$= 8*8^n - 3*3^n$	por definição de potência
	$= (5+3)*8^n - 3*3^n$	fazendo $8 = 5+3$
	$= 5*8^n + 3*8^n - 3*3^n$	distribuindo a soma
	$= 5*8^n + 3*(8^n - 3^n)$	pondo 3 em evidência
	$= 5*8^n + 3*5*p$	por hipótese de indução, $8^n - 3^n$ é múltiplo de 5, i.e. 5*p
	$= 5*(8^n + 3*p)$	pondo 5 em evidência
	$= 5*q$	fazendo $q = 8^n + 3*p$

q.e.d.