Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2016 / 17 – 3º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**nº:**

1. **(3 val)** Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Todos os cubos pequenos estão à esquerda do tetraedro **b**.

$$\mathrm{Tet}(b) \land \forall x\ ((\mathrm{Cube}(x) \land \mathrm{Small}(x)) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x,b))$$

b) Existem dodecaedros maiores que todos os tetraedros à sua (dos dodecaedros) esquerda.

$$\exists x\ (\mathrm{Dodec}(x) \land \forall y\ ((\mathrm{Tet}(y) \land \mathrm{LeftOf}(y,x)) \rightarrow \mathrm{Larger}(x,y)))$$

c) Todos os cubos estão à frente de algum bloco, a menos que (os cubos) sejam grandes.

$$\forall x\ ((\mathrm{Cube}(x) \land \neg\ \mathrm{Large}(x)) \rightarrow \exists y\ \mathrm{FrontOf}(x,y))$$

d) Todos os dodecaedros, e apenas os dodecaedros, não são grandes.

$$\forall x\ (\mathrm{Dodec}(x) \leftrightarrow \neg \mathrm{Large}(x))$$

e) Todos os blocos estão em linhas diferentes.

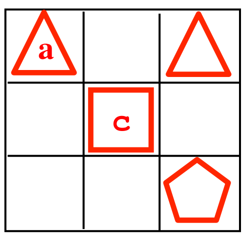
$$\forall x\ \forall y\ (\ x \neq y \rightarrow \neg \mathrm{SameRow}(x,y))$$

f) O bloco **a** é o único cubo que existe.

$$\mathrm{Cube}(a) \land \forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow x = a)$$

2. **(3 val)** Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1. $\forall x\ (\mathrm{Tet}(x) \rightarrow \forall y\ (\neg \mathrm{Tet}(y) \rightarrow \mathrm{BackOf}(x,y)))$
2. $\exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \land \exists y\ \exists z\ (\mathrm{Tet}(y) \land \mathrm{Between}(x,y,z)))$
3. $\exists x\ (\mathrm{Dodec}(x) \land \forall y (\mathrm{Cube}(y) \rightarrow (\mathrm{LeftOf}(y,x) \land \mathrm{BackOf}(y,x))))$
4. $\mathrm{Cube}(c) \land \forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow x = c)$
5. $\exists x\ (\mathrm{Tet}(x) \land \mathrm{RightOf}(x,c))$
6. $\mathrm{Tet}(a) \land \forall x\ (x \neq a \rightarrow \mathrm{RightOf}(x,a))$



3. (4 val) Complete a demonstração abaixo, preenchendo as caixas assinaladas.

```
1  | ∃x (Cube(x) ∧ ∀y (¬Larger(x,y) → ¬Tet(y)))
   |----
2  |  | a:
   |  |----
3  |  |  | Tet(a)
   |  |  |----
4  |  |  |  | b: Cube(b)∧∀y(¬Larger(b,y)→¬Tet(y))
   |  |  |  |----
5  |  |  |  | Cube(b)                              Elim ∧ : 4
6  |  |  |  | ∀y (¬Larger(b,y) → ¬Tet(y))          Elim ∧ : 4
7  |  |  |  | ¬Larger(b,a) → ¬Tet(a)               Elim ∀ : 6
8  |  |  |  |  | ¬Larger(b,a)
   |  |  |  |  |----
9  |  |  |  |  | ¬Tet(a)                           Elim → : 7 , 8
10 |  |  |  |  | ⊥                                 Intr ⊥ : 3, 9
11 |  |  |  | ¬¬Larger(b,a)                        Intr ¬ : 8 - 10
12 |  |  |  | Larger(b,a)                          Elim ¬ : 11
13 |  |  |  | Cube(b) ∧ Larger(b,a)                Intr ∧ : 5 , 12
14 |  |  |  | ∃y (Cube(y) ∧ Larger(y,a))           Intr ∃ : 13
15 |  |  | ∃y (Cube(y) ∧ Larger(y,a))              Elim ∃ : 1, 4 - 14
16 |  | Tet(a) → ∃y(Cube(y) ∧ Larger(y,a))         Intr → : 3 - 15
17 | ∀x (Tet(x) → ∃y(Cube(y) ∧ Larger(y,x)))       Intr ∀ : 2 - 16
```

4. (3 val) Considere o seguinte argumento usando a linguagem de Tarski, e a respetiva demonstração.

```
1  | ∃x Tet(x)
2  | ∀x ∀y ((Cube(x) ∧ Tet(y)) → Large(x))
   |----
3  |  | a: Tet(a)
   |  |----
4  |  |  | Cube(b)
   |  |  |----
5  |  |  | Tet(a) ∧ Cube(b)                 Intr ∧ : 3 , 4
6  |  |  | (Cube(b) ∧ Tet(a)) → Large(b)    Elim ∀ : 2
7  |  |  | Large(b)                         Elim → : 5 , 6
8  | Large(b)                               Elim ∃ : 1 , 3 - 7
9  | ∃x Large(x)                            Intr ∃ : 8
```

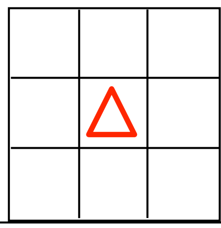
a) Indique todos os erros da demonstração acima, e se introduzem fórmulas que não são consequências válidas no contexto em que ocorrem.

Erros:

Erro 1. Na linha 7, a eliminação da → tem uma incorreção, já que o implicante da fórmula 6 não é a fórmula 5. No entanto a incorreção é menor já que a conjunção da fórmula 5 é comutativa e poderia ter sido obtida corretamente a partir das fórmulas 3 e 4.

Erro 2. O erro principal ocorre na linha 8, já que o contexto aberto com a hipótese introduzida em 4 não é "fechado". Tudo o que poderia concluir era que **Cube(b)→Large(b)**, e que após uma introdução do → e do **∃**, permitiria concluir que **∃x(Cube(x)→Large(x)).**

b) Apresente no quadro ao lado um contraexemplo que mostre que o argumento não é válido.



5. **(2 val)** O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

```
1 | ∃x (Small(x) ∨ Medium(x))
2 | ∀x (Dodec(x) → Large(x))
  |-------------------------
3 | ∃x (¬Cube(x) → Tet(x))
```

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário utilizar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

Nota: 2 respostas erradas cancelam uma resposta certa, mas a classificação da questão nunca será negativa.

- [ ] ∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))
- [x] ¬ ∃x (Large(x) ∧ Medium(x))
- [x] ¬ ∃x (Large(x) ∧ Small(x))
- [ ] ¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))
- [x] ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
- [ ] ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))
- [ ] ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))
- [ ] ¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))

6. **(5 val)** Valide o seguinte argumento apresentando a respetiva demonstração.

```
1  | ∃x (Tet(x) ∧ ∀y (Dodec(y) → Larger(x,y)))
2  | ∀x ∀y (Larger(x,y) → FrontOf(x,y))
   |-----------------------------------------
3  | | b:
   | |----------
4  | | | Dodec(b)
   | | |----------
5  | | | | a: Tet(a) ∧ ∀y (Dodec(y) → Larger(a,y))
   | | | |--------------------------------------
6  | | | | ∀y (Dodec(y) → Larger(a,y))        Elim ∧ : 5
7  | | | | Dodec(b) → Larger(a,b)             Elim ∀ : 6
8  | | | | Larger(a,b)                        Elim → : 4 , 7
9  | | | | Larger(a,b) → FrontOf(a,b)         Elim ∀ : 2
10 | | | | FrontOf(a,b)                       Elim → : 8 , 9
11 | | | | ∃y FrontOf(y,b))                   Intr ∃ : 10
12 | | | ∃y FrontOf(y,b)                      Elim ∃ : 1, 5 - 11
13 | | Dodec(b) → ∃y FrontOf(y,b)             Intr → : 4 - 12
14 | ∀x ( Dodec(x) → ∃y FrontOf(y,x))         Intr ∀: 3 - 13
```