Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2016 / 17 – Exame Final

Grupos para Avaliar
(Todos por Omissão)

G1	G2	G3	G4

Nome:	nº:

Grupo 1 (corresponde ao 1º teste)

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases:

- O Nuno e a Dora vão assistir ao festival Marés Bravas.
- A entrada para esse festival, que decorre na Trafaria, custa 30€.
- O meio de transporte para o festival pode ser o carro ou o barco.

a) Apresente uma assinatura Σ = <NP, $NF_0 \cup NF_1$> de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0: Constantes	*NF_1: Funções*	*NP: Predicados*
nuno, dora, 30 marés_bravas, trafaria, carro, barco	localDe/1, custoDe/1,	Assistir/2, =/2, Transporte/2,

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O Nuno e a Dora vão assistir ao festival Marés Bravas.

```
Assistir(nuno,marés_bravas) ∧ Assistir(dora,marés_bravas)
```

ii) A entrada para esse festival, que decorre na Trafaria, custa 30€.

```
custoDe(marés_bravas) = 30 ∧ localDe(marés_bravas) = trafaria
```

iii) O meio de transporte para o festival pode ser o carro ou o barco.

```
Transporte(marés_bravas,carro) ∨ Transporte(marés_bravas,barco)
```

1.2. (2 valores) Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica; V-FO: Verdade Lógica; V-TW: Verdade Analítica (Tarski);
P-TT: Possibilidade Tautológica; P-FO: Possibilidade Lógica; P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski).

	V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
¬ Cube(a) ∨ Cube(b) ∨ a ≠ b	N	S	S	S	S	S
Tet(a) ∧ ¬ (Tet(a) ∨ Tet(b))	N	N	N	N	N	N
(Cube(a) ∧ Tet(a)) → Dodec(b)	N	N	S	S	S	S

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ... , Premissa n } |= Conclusão	Val-TT	Val-FO	Val-TW
{ ¬ (¬ Cube(a) ∨ Tet(b)) } |= Cube(a)	S	S	S
{ Tet(a), a ≠ b) } |= ¬ Tet(b)	N	N	N
{ SameCol(a,b), a ≠ b } |= ¬ SameRow(a,b)	N	N	S

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1:** $(A \lor \neg C) \rightarrow B$ e **P2:** $\neg C \leftrightarrow B$, e as fórmulas **C1:** $\neg A \lor B$ e **C2:** $\neg B \land (\neg A \lor \neg C)$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2**, **C1** e **C2**.

A	B	C	(A ∨ ¬ C) → B			¬ C ↔ B		¬ A ∨ B		¬ B ∧ (¬ A ∨ ¬C)				
V	V	V	V	F	**V**	F	**F**	F	**V**	F	**F**	F	F	F
V	V	F	V	V	**V**	V	**V**	F	**V**	F	**F**	F	V	V
V	F	V	V	F	**F**	F	**V**	F	**F**	V	**F**	F	F	F
V	F	F	V	V	**F**	V	**F**	F	**F**	V	**V**	F	V	V
F	V	V	F	F	**V**	F	**F**	V	**V**	F	**F**	V	V	F
F	V	F	V	V	**V**	V	**V**	V	**V**	F	**F**	V	V	V
F	F	V	F	F	**V**	F	**V**	V	**V**	V	**V**	V	V	F
F	F	F	V	V	**F**	V	**F**	V	**V**	V	**V**	V	V	V

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não consequências tautológicas das premissas P1 e P2.

Justificação:

A fórmula **C1** é consequência tautológica das premissas **P1** e **P2** pois nas duas interpretações que a tornam falsa, (**A = V** e **B = F**) pelo menos uma das premissas também o é.

A fórmula **C2** é falsa em algumas interpretações (por exemplo, **A = C = F** e **B = V**) em que as premissas são verdadeiras. Assim sendo, **C2** não é consequência tautológica de **P1** e **P2**.

1.5. **(5 valores)** Considere a fórmula $\neg(C \rightarrow \neg (A \rightarrow B)) \land (\neg B \rightarrow \neg(A \land C))$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

$\neg(C \rightarrow \neg (A \rightarrow B)) \land (\neg B \rightarrow \neg(A \land C))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg C \lor \neg(A \rightarrow B)) \land (\neg\neg B \lor \neg (A \land C))$	Equivalência de $\rightarrow$
$\Leftrightarrow (\neg\neg C \land \neg\neg(A \rightarrow B)) \land (\neg\neg B \lor (\neg A \lor \neg C))$	Leis de de Morgan
$\Leftrightarrow (C \land (A \rightarrow B)) \land (B \lor (\neg A \lor \neg C))$	Dupla Negação
$\Leftrightarrow (C \land (\neg A \lor B)) \land (B \lor (\neg A \lor \neg C))$	Equivalência de $\rightarrow$
$\Leftrightarrow (C \land (\neg A \lor B)) \land (B \lor \neg A \lor \neg C)$	Associatividade da $\lor$
$\Leftrightarrow C \land (\neg A \lor B) \land (B \lor \neg A \lor \neg C)$	Associatividade da $\land$

Esta fórmula já está em CNF mas pode ser simplificada

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land C \land (B \lor \neg A \lor \neg C)$	Comutatividade da $\land$
$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land C \land (B \lor \neg A)$	Absorção
$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg A \lor B) \land C$	Comutatividade da $\lor$ e da $\land$
$\Leftrightarrow ((\neg A \lor B) \land (\neg A \lor B)) \land C$	Associatividade da $\land$
$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land C$	Idempotência

Esta fórmula CNF não pode ser mais simplificada

$\Leftrightarrow (\neg A \land C) \lor (B \land C)$	Distribuição da $\land$ e.r.a. $\lor$

Esta fórmula já está em DNF e não pode ser mais simplificada.

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Um dos três blocos **a** , **b** e **c**, está entre os outros.

`Between(a,b,c) ∨ Between(b,a,c) ∨ Between(c,a,b)`

b) Os blocos **a** e **b** estão na mesma coluna apenas se tiverem a mesma forma.

`SameCol(a,b) → SameShape(a,b)`

c) Entre os blocos **a** e **b**, um e apenas um deles está atrás do bloco **c**, que é um cubo.

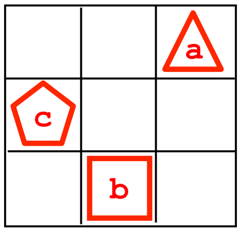
`Cube(c) ∧ (BackOf(a,c) ↔ ¬BackOf(b,c))`

d) Os blocos **a**, **b** e **c** têm todos formas diferentes e **a** não é cubo.

`¬Cube(a) ∧ ¬SameShape(a,b) ∧ ¬SameShape(a,c) ∧ ¬SameShape(b,c)`

2.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

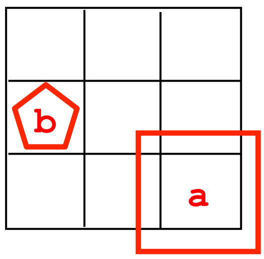
```
1. ¬Dodec(c) → SameCol(a,c)
2. BackOf(a,c) ∧ FrontOf(b,c)
3. Tet(a) ∨ Tet(b) ∨ Tet(c)
4. (Tet(b) ∨ Dodec(b)) → Cube(b)
5. ¬(RightOf(a,b) → ¬LeftOf(c,b))
```



2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas.

```
1. | Cube(a) ↔ ¬Small(a)
2. | ¬Dodec(b) → Cube(a)
   |----------------------
3. | | Dodec(b)
   | |----------
4. | | ¬Cube(a)              Elim →: 2 , 3
5. | | | ¬Small(a)
   | | |----------
6. | | | Cube(a)             Elim ↔: 1 , 5
7. | | | ⊥                   Intr ⊥: 4 , 6
8. | | Small(a)              Intr ¬: 5 - 7
9. | Dodec(b) → Small(a)     Intr →: 3 - 8
```



b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido.

Erro(s):

No passo 8 a fórmula correcta seria **¬¬Small(a)**, em que a dupla negação seria posteriormente eliminada, mas esta é uma "simplificação" que geralmente é feita (e aceite).

Já no passo 4, a eliminação da implicação não é aplicável. O antecedente ser falso não impõe que o consequente o seja!

Assim sendo, a conclusão não é válida, podendo **b** ser um dodecaedro e **a** não ser pequeno.

2.4. (4 val) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1	(A ∨ B) → (C → D)	
2	¬(B ∨ D)	
3.	¬(¬A ∨ ¬C)	
4.	¬A	
5.	¬A ∨ ¬C	Intr ∨ : 4
6.	⊥	Intr ⊥ : 3 , 5
7.	¬¬A	Intr ¬ : 4 - 6
8.	A	Elim ¬ : 7
9.	A ∨ B	Intr ∨ : 8
10.	C → D	Elim → : 1 , 9
11.	¬C	
12.	¬A ∨ ¬C	Intr ∨ : 11
13.	⊥	Intr ⊥ : 3 , 12
14.	¬¬C	Intr ¬ : 11 - 13
15.	C	Elim ¬ : 14
16.	D	Elim → : 10 , 15
17.	B ∨ D	Intr ∨ : 16
18.	⊥	Intr ⊥ : 2 , 17
19.	¬¬(¬A ∨ ¬C)	Intr ¬ : 3 - 18
20.	¬A ∨ ¬C	Elim ¬ : 19

2.5. **(5 valores)** Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

1.	(A ∨ B) → C	
2.	¬C ∨ D ∨ E	
3.	A	
4.	A ∨ B	Intr ∨ : 3
5.	C	Elim → : 1 , 4
6.	¬C	
7.	⊥	Intr ⊥ : 5 , 6
8.	D ∨ E	Elim ⊥ : 7
9.	D	
10.	D ∨ E	Intr ∨ : 9
11.	E	
12.	D ∨ E	Intr ∨ : 11
13.	D ∨ E	Elim ∨ : 2, 6-8, 9-10, 11-12
14.	A → (D ∨ E)	Intr → : 3 - 13

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Blocos distintos não têm a mesma forma a menos que sejam cubos.

$$\forall x\ \forall y\ ((x \neq y \land \neg Cube(x)) \to \neg SameShape(x,y))$$

b) Todos os tetraedros maiores que algum dodecaedro estão à esquerda do bloco **c**.

$$\forall x\ ((Tet(x) \land \exists y\ (Dodec(y) \land Larger(x,y)) \to LeftOf(x,c))$$

c) Os blocos maiores são todos dodecaedros.

$$\forall x\ (\neg \exists y\ Larger(y,x) \to Dodec(x))$$

d) Há blocos de todos os tamanhos.

$$\exists x\ Small(x) \land \exists y\ Medium(y) \land \exists z\ Large(z)$$

e) Alguns blocos, mas não os cubos, estão à esquerda do bloco c.

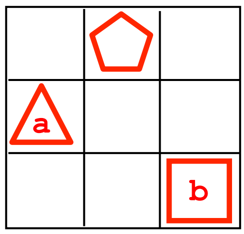
$$\exists x\ (\neg Cube(x) \land LeftOf(x,c)) \land \forall x\ (Cube(x) \to \neg LeftOf(x,c))$$

f) Todos os blocos estão entre outros 2 blocos, a menos que sejam cubos.

$$\forall x\ (\neg Cube(x) \to \exists y\ \exists z\ Between(x,y,z))$$

3.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1. $\exists x\ (Dodec(x) \land \forall y\ (x \neq y \to BackOf(x,y)))$
2. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((LeftOf(x,y) \land LeftOf(y,z)) \to Dodec(y))$
3. $\forall x\ (Tet(x) \to \neg \exists y\ (Cube(y) \land \neg FrontOf(y,x)))$
4. $\forall x\ \forall y\ ((Dodec(x) \land Dodec(y)) \to x = y)$
5. $\neg Dodec(b) \land FrontOf(b,a)$
6. $\exists x\ LeftOf(x,b) \land \exists y\ RightOf(y,a)$



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1	$\neg \exists x\ Medium(x)$
2	$\forall x\ (Large(x) \to Dodec(x))$
3	$\forall x\ (Tet(x) \lor Cube(x)) \to \forall y\ Small(y)$

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☒ $\forall x\ (Large(x) \lor Medium(x) \lor Small(x))$
- ☐ $\neg \exists x\ (Large(x) \land Medium(x))$
- ☐ $\neg \exists x\ (Large(x) \land Small(x))$
- ☐ $\neg \exists x\ (Medium(x) \land Small(x))$
- ☐ $\forall x\ (Tet(x) \lor Cube(x) \lor Dodec(x))$
- ☐ $\neg \exists x\ (Tet(x) \land Cube(x))$
- ☒ $\neg \exists x\ (Tet(x) \land Dodec(x))$
- ☒ $\neg \exists x\ (Cube(x) \land Dodec(x))$

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

```
 1. | ∀x (Cube(x) → ∃y BackOf(x,y))
 2. | ∀x (∃y BackOf(x,y) → (Small(x) ∧ ∃y LeftOf(x,y)))
 3. | ∀x (¬Cube(x) → Tet(x))
    |----------------------------------------
 4. |  | ¬∃x ∃y LeftOf(x,y)
    |  |-----------------------------------
 5. |  |  | c: [                    ]
    |  |  |--------------------------------
 6. |  |  |  | [Cube(c)              ]
    |  |  |  |------------------------------
 7. |  |  |  | Cube(c) → ∃y BackOf(c,y)                    Elim ∀: 1
 8. |  |  |  | ∃y BackOf(c,y)                              [Elim →: 6, 7]
 9. |  |  |  | ∃y BackOf(c,y) → (Small(c)∧∃y LeftOf(c,y))  Elim ∀: 2
10. |  |  |  | [Small(c) ∧ ∃y LeftOf(c,y)]                 Elim →: 8, 9
11. |  |  |  | ∃y LeftOf(c,y)                              Elim ∧: 10
12. |  |  |  | ∃x∃y LeftOf(x,y)                            [Intr ∃: 11]
13. |  |  |  | ⊥                                           Intr ⊥: 4 , 12
14. |  |  | ¬ Cube(c)                                      Intr ¬: 6 - 13
15. |  |  | [¬Cube(c) → Tet(c)]                            Elim ∀: 3
16. |  |  | Tet(c)                                         Elim →: 14, 15
17. |  | ∀x Tet(x)                                         [Intr ∀: 5 - 16]
18. | ¬∃x ∃y LeftOf(x,y) → ∀x Tet(x)                       [Intr →: 4 - 17]
```

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

```
 1. | ∃x (Tet(x) ∧ ∀y ((Cube(y) ∧ Large(y)) → BackOf(y,x)))
 2. | ¬∃x ∃y BackOf(x,y)
    |----------------------------------------
 3. |  | c:
    |  |-----------------
 4. |  |  | Cube(c)
    |  |  |-----------------
 5. |  |  |  | a: Tet(a) ∧ ∀y ((Cube(y) ∧ Large(y)) → BackOf(y,a))
    |  |  |  |----------------------------------------------------
 6. |  |  |  | ∀y ((Cube(y) ∧ Large(y)) → BackOf(y,a))     Elim ∧: 5
 7. |  |  |  | (Cube(c) ∧ Large(c)) → BackOf(c,a)          Elim ∀: 6
 8. |  |  |  |  | Large(c)
    |  |  |  |  |----------------------------
 9. |  |  |  |  | Cube(c) ∧ Large(c)                     Intr ∧: 4, 8
10. |  |  |  |  | BackOf(c,a)                            Elim →: 7 , 9
11. |  |  |  |  | ∃x ∃y BackOf(x,y)                      Intr ∃: 10
12. |  |  |  |  | ⊥                                      Intr ⊥: 2 , 11
13. |  |  |  | ¬Large(c)                                  Intr ¬: 8 - 12
14. |  |  | ¬Large(c)                                     Elim ∃: 1, 5 - 13
15. |  | Cube(c) → ¬Large(c)                              Intr →: 4 - 14
16. | ∀x (Cube(x) → ¬Large(x))                            Intr ∀: 3 - 15
```

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível. Existe mais do que uma interpretação que satisfaça S ? Justifique.

1. $B \to A$	5. $(B \land D) \to \bot$
2. $(A \land D) \to E$	6. $D \to E$
3. $D \to \bot$	7. $(A \land B) \to C$
4. $(B \land C) \to A$	8. $T \to B$

Pela cláusula 8: **B = True**, logo pela cláusula 1: **A = True**, e pela cláusula 7: **C = True**. Por outro lado, pela cláusula 3: **D = False**. Com estes valores de verdade as restantes cláusulas são satisfeitas: as cláusulas 2, 5 e 6 por terem o antecedente falso, a cláusula 4 por o consequente ser verdadeiro. Nenhuma cláusula impõe um valor de verdade para **E**, logo existem 2 interpretações que satisfazem S: **{A,B,C,¬D,E}** e **{A,B,C,¬D,¬E}**.

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$(A \lor B) \to C$
P2	$\neg C \lor D \lor E$
X	$A \to (D \lor E)$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

1.	$\neg A \lor C$	(P1)
2.	$\neg B \lor C$	(P1)
3.	$\neg C \lor D \lor E$	(P2)
4.	A	(¬X)
5.	$\neg D$	(¬X)
6.	$\neg E$	(¬X)

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

7.	$\neg C \lor D$	Res 6 , 3
8.	$\neg C$	Res 7 , 5
9.	$\neg A$	Res 8 , 1
10.	$\square$	Res 9 , 4

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) $\forall x\ ((Cube(x) \lor \neg\exists y\ Larger(y,x)) \to \exists z\ SameCol(z,x))$

$\forall x\ \exists y\ \exists z\ ((\neg Cube(x) \lor SameCol(z,x)) \land (Larger(y,x) \lor SameCol(z,x)))$

b) $\forall x\ (Large(x) \to \forall y\ (Cube(y) \to \exists z\ Between(z,x,y)))$

$\forall x\ \forall y\ \exists z\ (\neg Large(x) \lor \neg Cube(y) \lor Between(z,x,y))$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$\forall x\ (Cube(x) \to \exists y\ (FrontOf(y,x) \land \neg\forall z\ Between(x,y,z)))$

1. $\neg Cube(x1) \lor FrontOf(f(x1),x1)$
2. $\neg Cube(x2) \lor \neg Between(x2,f(x2),g(x2))$

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	∀x (Cube(x) → ∃y BackOf(x,y))
P2	∀x (∃y BackOf(x,y) → (Small(x) ∧ ∃z LeftOf(x,z)))
P3	∀x (¬Cube(x) → Tet(x))
C	¬∃x ∃y LeftOf(x,y) → ∀x Tet(x)

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

1. ¬Cube(x1) ∨ BackOf(x1,f(x1))	de P1
2. ¬ BackOf(x2,y2) ∨ Small(x2)	de P2
3. ¬ BackOf(x3,y3) ∨ LeftOf(x3,g(x3))	de P2
4. Cube(x4) ∨ Tet(x4)	de P3
5. ¬LeftOf(x5,y5)	de ¬C
6. ¬Tet(a)	de ¬C

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

7. Cube(a)	Res 6, 4 {x4 / a}
8. BackOf(a,f(a))	Res 7, 1 {x1 / a}
9. LeftOf(a,g(a))	Res 8, 3 {x3 / a, y3 / f(a)}
10. □	Res 9, 5 {x5 / a, y5 / g(a)}}

4.6. (5 valores) Notando que

```
1*2         =  2 = 1*2*3/3;
1*2+2*3     =  8 = 2*3*4/3;
1*2+2*3+3*4 = 20 = 3*4*5/3;
```

Mostre que, para qualquer n ≥ 1 se verifica S(n) = 1*2+...+n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3

Passo Base : S(1) = 1*2*3/3

Para n = 1 temos

S(1) = 1*2 = 1*2*3/3

Passo de Indução :

S(n) = n*(n+1)*(n+2)/3 ⇒ S(n+1) = (n+1)*(n+2)*(n+3)/3

De facto temos

```
S(n+1) = 1*2 + 1*3 + ...  + n*(n+1)+(n+1)*(n+2)
       = S(n) + (n+1)*(n+2)
       = n*(n+1)*(n+2)/3 + (n+1)*(n+2)
       = [(n+1)*(n+2)] * (1+n/3)
       = [(n+1)*(n+2)] * (3+n)/3
       = (n+1)*(n+2)*(n+3)/3
```

q.e.d