Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2016 / 17 – Exame Final

Grupos para Avaliar

(Todos por Omissão)

G1	G2	G3	G4

Nome:	**nº:**

Grupo 1 (corresponde ao 1º teste)

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases:

- O Nuno e a Dora vão assistir ao festival Marés Bravas.
- A entrada para esse festival, que decorre na Trafaria, custa 30€.
- O meio de transporte para o festival pode ser o carro ou o barco.

a) Apresente uma assinatura Σ = <NP, $NF_0 \cup NF_1$> de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0: Constantes	*NF_1: Funções*	*NP: Predicados*

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O Nuno e a Dora vão assistir ao festival Marés Bravas.

ii) A entrada para esse festival, que decorre na Trafaria, custa 30€.

iii) O meio de transporte para o festival pode ser o carro ou o barco.

1.2. (2 valores) Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica; V-FO: Verdade Lógica; V-TW: Verdade Analítica (Tarski);
P-TT: Possibilidade Tautológica; P-FO: Possibilidade Lógica; P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski).

	V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
`¬ Cube(a) ∨ Cube(b) ∨ a ≠ b`						
`Tet(a) ∧ ¬ (Tet(a) ∨ Tet(b))`						
`(Cube(a) ∧ Tet(a)) → Dodec(b)`						

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ... , Premissa n } |= Conclusão	**Val-TT**	**Val-FO**	**Val-TW**
`{ ¬ (¬ Cube(a) ∨ Tet(b)) } |= Cube(a)`			
`{ Tet(a), a ≠ b) } |= ¬ Tet(b)`			
`{ SameCol(a,b), a ≠ b } |= ¬ SameRow(a,b)`			

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1:** $(A \lor \neg C) \rightarrow B$ e **P2:** $\neg C \leftrightarrow B$, e as fórmulas **C1:** $\neg A \lor B$ e **C2:** $\neg B \land (\neg A \lor \neg C)$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2**, **C1** e **C2**.

A	B	C	$(A \lor \neg C) \rightarrow B$	$\neg C \leftrightarrow B$	$\neg A \lor B$	$\neg B \land (\neg A \lor \neg C)$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não consequências tautológicas das premissas P1 e P2.

Justificação:

1.5. **(5 valores)** Considere a fórmula $\neg(C \rightarrow \neg (A \rightarrow B)) \land (\neg B \rightarrow \neg(A \land C))$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Um dos três blocos **a** , **b** e **c**, está entre os outros.

b) Os blocos **a** e **b** estão na mesma coluna apenas se tiverem a mesma forma.

c) Entre os blocos **a** e **b**, um e apenas um deles está atrás do bloco **c**, que é um cubo.

d) Os blocos **a**, **b** e **c** têm todos formas diferentes e **a** não é cubo.

2.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

```
1. ¬Dodec(c) → SameCol(a,c)
2. BackOf(a,c) ∧ FrontOf(b,c)
3. Tet(a) ∨ Tet(b) ∨ Tet(c)
4. (Tet(b) ∨ Dodec(b)) → Cube(b)
5. ¬(RightOf(a,b) → ¬LeftOf(c,b))
```

2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas.

```
1. | Cube(a) ↔ ¬Small(a)
2. | ¬Dodec(b) → Cube(a)
   |-------------------------
3. | | Dodec(b)
   | |----------
4. | | ¬Cube(a)                Elim →: 2 , 3
5. | | | ¬Small(a)
   | | |----------
6. | | | Cube(a)               Elim ↔: 1 , 5
7. | | | ⊥                     Intr ⊥: 4 , 6
8. | | Small(a)                Intr ¬: 5 - 7
9. | Dodec(b) → Small(a)       Intr →: 3 - 8
```

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido.

Erro(s):

2.4. (4 val) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1	(A ∨ B) → (C → D)	
2	¬(B ∨ D)	
3.		
4.	¬A	
5.	¬A ∨ ¬C	Intr ∨ : 4
6.		Intr ⊥ : 3 , 5
7.	¬¬A	Intr ¬ : 4 - 6
8.	A	Elim ¬ : 7
9.	A ∨ B	Intr ∨ : 8
10.		
11.	¬C	
12.	¬A ∨ ¬C	
13.	⊥	Intr ⊥ : 3 , 12
14.	¬¬C	Intr ¬ : 11 - 13
15.	C	Elim ¬ : 14
16.		Elim → : 10 , 15
17.	B ∨ D	Intr ∨ : 16
18.	⊥	
19.	¬¬(¬A ∨ ¬C)	
20.	¬A ∨ ¬C	Elim ¬ : 19

2.5. **(5 valores)** Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

1.	(A ∨ B) → C
2.	¬C ∨ D ∨ E
	A → (D ∨ E)

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Blocos distintos não têm a mesma forma a menos que sejam cubos.

b) Todos os tetraedros maiores que algum dodecaedro estão à esquerda do bloco **c**.

c) Os blocos maiores são todos dodecaedros.

d) Há blocos de todos os tamanhos.

e) Alguns blocos, mas não os cubos, estão à esquerda do bloco c.

f) Todos os blocos estão entre outros 2 blocos, a menos que sejam cubos.

3.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1. **∃x (Dodec(x) ∧ ∀y (x ≠ y → BackOf(x,y)))**
2. **∀x ∀y ∀z ((LeftOf(x,y) ∧ LeftOf(y,z)) → Dodec(y))**
3. **∀x (Tet(x) → ¬ ∃y (Cube(y) ∧ ¬FrontOf(y,x)))**
4. **∀x ∀y ((Dodec(x) ∧ Dodec(y)) → x = y)**
5. **¬Dodec(b) ∧ FrontOf(b,a)**
6. **∃x LeftOf(x,b) ∧ ∃y RightOf(y,a)**

3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1	**¬ ∃x Medium(x)**
2	**∀x (Large(x) → Dodec(x))**
3	**∀x (Tet(x) ∨ Cube(x)) → ∀y Small(y)**

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☐ **∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Large(x) ∧ Medium(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Large(x) ∧ Small (x))**
- ☐ **¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))**
- ☐ **∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))**
- ☐ **¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))**

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

1.	∀x (Cube(x) → ∃y BackOf(x,y))	
2.	∀x (∃y BackOf(x,y) → (Small(x) ∧ ∃y LeftOf(x,y)))	
3.	∀x (¬Cube(x) → Tet(x))	
4.	¬∃x ∃y LeftOf(x,y)	
5.		
6.		
7.	Cube(c) → ∃y BackOf(c,y)	Elim ∀: 1
8.	∃y BackOf(c,y)	
9.	∃y BackOf(c,y) → (Small(c)∧∃y LeftOf(c,y))	Elim ∀: 2
10.		Elim →: 8, 9
11.	∃y LeftOf(c,y)	Elim ∧: 10
12.	∃x∃y LeftOf(x,y)	
13.	⊥	Intr ⊥: 4 , 12
14.	¬ Cube(c)	Intr ¬: 6 - 13
15.		Elim ∀: 3
16.	Tet(c)	Elim →: 14, 15
17.	∀x Tet(x)	
18.	¬∃x ∃y LeftOf(x,y) → ∀x Tet(x)	

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

1.	∃x (Tet(x) ∧ ∀y ((Cube(y) ∧ Large(y)) → BackOf(y,x)))
2.	¬∃x ∃y BackOf(x,y)
	∀x (Cube(x) → ¬Large(x))

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível. Existe mais do que uma interpretação que satisfaça S ? Justifique.

1. $B \rightarrow A$	5. $(B \wedge D) \rightarrow \perp$
2. $(A \wedge D) \rightarrow E$	6. $D \rightarrow E$
3. $D \rightarrow \perp$	7. $(A \wedge B) \rightarrow C$
4. $(B \wedge C) \rightarrow A$	8. $T \rightarrow B$

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$(A \vee B) \rightarrow C$
P2	$\neg C \vee D \vee E$
X	$A \rightarrow (D \vee E)$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) $\forall x\ ((Cube(x) \vee \neg\exists y\ Larger(y,x)) \rightarrow \exists z\ SameCol(z,x))$

b) $\forall x\ (Large(x) \rightarrow \forall y\ (Cube(y) \rightarrow \exists z\ Between(z,x,y)))$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$\forall x\ (Cube(x) \rightarrow \exists y\ (FrontOf(y,x) \wedge \neg\forall z\ Between(x,y,z)))$

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	$\forall x$ **(Cube(x) $\rightarrow \exists y$ BackOf(x,y))**
P2	$\forall x$ **($\exists y$ BackOf(x,y) $\rightarrow$ (Small(x) $\wedge$ $\exists z$ LeftOf(x,z)))**
P3	$\forall x$ **($\neg$Cube(x) $\rightarrow$ Tet(x))**
C	**$\neg\exists x$ $\exists y$ LeftOf(x,y) $\rightarrow \forall x$ Tet(x)**

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.6. (5 valores) Notando que

```
1*2         =  2 = 1*2*3/3;
1*2+2*3     =  8 = 2*3*4/3;
1*2+2*3+3*4 = 20 = 3*4*5/3;
```

Mostre que, para qualquer n $\geq$ 1 se verifica **S(n)** = **1*2+...+n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3**

Passo Base :

Passo de Indução :