

Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2016 / 17 – Exame Final

Grupos para Avaliar

(Todos por Omissão)

G1

G2

G3

G4

Nome:

nº:

Grupo 1 (corresponde ao 1º teste)

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases:

- O Nuno e a Dora vão assistir ao festival Marés Bravas.
- A entrada para esse festival, que decorre na Trafaria, custa 30€.
- O meio de transporte para o festival pode ser o carro ou o barco.

a) Apresente uma assinatura $\Sigma = \langle NP, NF_0 \cup NF_1 \rangle$ de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0 : Constantes	NF_1 : Funções	NP: Predicados

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O Nuno e a Dora vão assistir ao festival Marés Bravas.

ii) A entrada para esse festival, que decorre na Trafaria, custa 30€.

iii) O meio de transporte para o festival pode ser o carro ou o barco.

1.2. (2 valores) Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica;

V-FO: Verdade Lógica;

V-TW: Verdade Analítica (Tarski);

P-TT: Possibilidade Tautológica;

P-FO: Possibilidade Lógica;

P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski).

$\neg \text{Cube}(a) \vee \text{Cube}(b) \vee a \neq b$

$\text{Tet}(a) \wedge \neg (\text{Tet}(a) \vee \text{Tet}(b))$

$(\text{Cube}(a) \wedge \text{Tet}(a)) \rightarrow \text{Dodec}(b)$

V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ..., Premissa n} |= Conclusão

{ $\neg (\neg \text{Cube}(a) \vee \text{Tet}(b))$ } |= $\text{Cube}(a)$

{ $\text{Tet}(a), a \neq b$ } |= $\neg \text{Tet}(b)$

{ $\text{SameCol}(a, b), a \neq b$ } |= $\neg \text{SameRow}(a, b)$

Val-TT	Val-FO	Val-TW

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1**: $(A \vee \neg C) \rightarrow B$ e **P2**: $\neg C \leftrightarrow B$, e as fórmulas **C1**: $\neg A \vee B$ e **C2**: $\neg B \wedge (\neg A \vee \neg C)$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2**, **C1** e **C2**.

A	B	C	$(A \vee \neg C) \rightarrow B$	$\neg C \leftrightarrow B$	$\neg A \vee B$	$\neg B \wedge (\neg A \vee \neg C)$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não conseqüências tautológicas das premissas P1 e P2.

Justificação:

1.5. (5 valores) Considere a fórmula $\neg(C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)) \wedge (\neg B \rightarrow \neg(A \wedge C))$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Um dos três blocos **a**, **b** e **c**, está entre os outros.

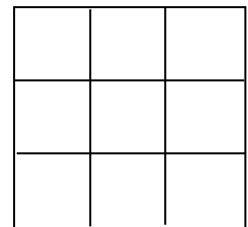
b) Os blocos **a** e **b** estão na mesma coluna apenas se tiverem a mesma forma.

c) Entre os blocos **a** e **b**, um e apenas um deles está atrás do bloco **c**, que é um cubo.

d) Os blocos **a**, **b** e **c** têm todas formas diferentes e **a** não é cubo.

2.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

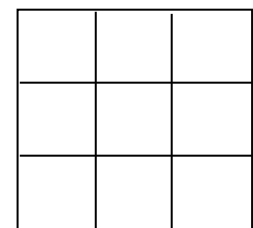
1. $\neg \text{Dodec}(c) \rightarrow \text{SameCol}(a, c)$
2. $\text{BackOf}(a, c) \wedge \text{FrontOf}(b, c)$
3. $\text{Tet}(a) \vee \text{Tet}(b) \vee \text{Tet}(c)$
4. $(\text{Tet}(b) \vee \text{Dodec}(b)) \rightarrow \text{Cube}(b)$
5. $\neg (\text{RightOf}(a, b) \rightarrow \neg \text{LeftOf}(c, b))$



2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas.

1.	$\text{Cube}(a) \leftrightarrow \neg \text{Small}(a)$	
2.	$\neg \text{Dodec}(b) \rightarrow \text{Cube}(a)$	
3.	$\text{Dodec}(b)$	
4.	$\neg \text{Cube}(a)$	$\text{Elim } \rightarrow: 2, 3$
5.	$\neg \text{Small}(a)$	
6.	$\text{Cube}(a)$	$\text{Elim } \leftrightarrow: 1, 5$
7.	\perp	$\text{Intr } \perp: 4, 6$
8.	$\text{Small}(a)$	$\text{Intr } \neg: 5 - 7$
9.	$\text{Dodec}(b) \rightarrow \text{Small}(a)$	$\text{Intr } \rightarrow: 3 - 8$



b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido.

Erro(s):

2.4. (4 val) Complete a demonstr ao abaixo no sistema de Dedu ao Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1	$(A \vee B) \rightarrow (C \rightarrow D)$	
2	$\neg (B \vee D)$	
3.	<div style="border: 1px solid black; height: 15px; width: 100%;"></div>	
4.	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\neg A$</div>	
5.	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\neg A \vee \neg C$</div>	Intr \vee : 4
6.	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><div style="border: 1px solid black; height: 15px; width: 100%;"></div></div>	Intr \perp : 3 , 5
7.	$\neg\neg A$	Intr \neg : 4 - 6
8.	A	Elim \neg : 7
9.	$A \vee B$	Intr \vee : 8
10.	<div style="border: 1px solid black; height: 15px; width: 100%;"></div>	
11.	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\neg C$</div>	
12.	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\neg A \vee \neg C$</div>	
13.	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">\perp</div>	Intr \perp : 3 , 12
14.	$\neg\neg C$	Intr \neg : 11 - 13
15.	C	Elim \neg : 14
16.	<div style="border: 1px solid black; height: 15px; width: 100%;"></div>	Elim \rightarrow : 10 , 15
17.	$B \vee D$	Intr \vee : 16
18.	\perp	
19.	$\neg\neg (\neg A \vee \neg C)$	
20.	$\neg A \vee \neg C$	Elim \neg : 19

2.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstr ao no sistema de Dedu ao Natural

1.	$(A \vee B) \rightarrow C$	
2.	$\neg C \vee D \vee E$	
	$A \rightarrow (D \vee E)$	

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Blocos distintos não têm a mesma forma a menos que sejam cubos.

b) Todos os tetraedros maiores que algum dodecaedro estão à esquerda do bloco c.

c) Os blocos maiores são todos dodecaedros.

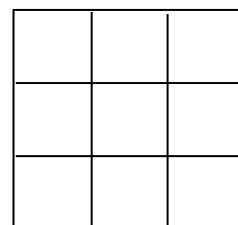
d) Há blocos de todos os tamanhos.

e) Alguns blocos, mas não os cubos, estão à esquerda do bloco c.

f) Todos os blocos estão entre outros 2 blocos, a menos que sejam cubos.

3.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1. $\exists x (Dodec(x) \wedge \forall y (x \neq y \rightarrow BackOf(x,y)))$
2. $\forall x \forall y \forall z ((LeftOf(x,y) \wedge LeftOf(y,z)) \rightarrow Dodec(y))$
3. $\forall x (Tet(x) \rightarrow \neg \exists y (Cube(y) \wedge \neg FrontOf(y,x)))$
4. $\forall x \forall y ((Dodec(x) \wedge Dodec(y)) \rightarrow x = y)$
5. $\neg Dodec(b) \wedge FrontOf(b,a)$
6. $\exists x LeftOf(x,b) \wedge \exists y RightOf(y,a)$



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1	$\neg \exists x Medium(x)$
2	$\forall x (Large(x) \rightarrow Dodec(x))$
3	$\forall x (Tet(x) \vee Cube(x)) \rightarrow \forall y Small(y)$

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- $\forall x (Large(x) \vee Medium(x) \vee Small(x))$
- $\neg \exists x (Large(x) \wedge Medium(x))$
- $\neg \exists x (Large(x) \wedge Small(x))$
- $\neg \exists x (Medium(x) \wedge Small(x))$
- $\forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$
- $\neg \exists x (Tet(x) \wedge Cube(x))$
- $\neg \exists x (Tet(x) \wedge Dodec(x))$
- $\neg \exists x (Cube(x) \wedge Dodec(x))$

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

1.	$\forall x (Cube(x) \rightarrow \exists y BackOf(x,y))$	
2.	$\forall x (\exists y BackOf(x,y) \rightarrow (Small(x) \wedge \exists y LeftOf(x,y)))$	
3.	$\forall x (\neg Cube(x) \rightarrow Tet(x))$	
4.	$\neg \exists x \exists y LeftOf(x,y)$	
5.	<div style="border: 1px solid black; height: 15px; width: 100%;"></div>	
6.	<div style="border: 1px solid black; height: 15px; width: 100%;"></div>	
7.	$Cube(c) \rightarrow \exists y BackOf(c,y)$	Elim \forall : 1
8.	$\exists y BackOf(c,y)$	<div style="border: 1px solid black; height: 15px; width: 100%;"></div>
9.	$\exists y BackOf(c,y) \rightarrow (Small(c) \wedge \exists y LeftOf(c,y))$	Elim \forall : 2
10.	<div style="border: 1px solid black; height: 15px; width: 100%;"></div>	Elim \rightarrow : 8, 9
11.	$\exists y LeftOf(c,y)$	Elim \wedge : 10
12.	$\exists x \exists y LeftOf(x,y)$	<div style="border: 1px solid black; height: 15px; width: 100%;"></div>
13.	\perp	Intr \perp : 4, 12
14.	$\neg Cube(c)$	Intr \neg : 6 - 13
15.	<div style="border: 1px solid black; height: 15px; width: 100%;"></div>	Elim \forall : 3
16.	$Tet(c)$	Elim \rightarrow : 14, 15
17.	$\forall x Tet(x)$	<div style="border: 1px solid black; height: 15px; width: 100%;"></div>
18.	$\neg \exists x \exists y LeftOf(x,y) \rightarrow \forall x Tet(x)$	<div style="border: 1px solid black; height: 15px; width: 100%;"></div>

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

1.	$\exists x (Tet(x) \wedge \forall y ((Cube(y) \wedge Large(y)) \rightarrow BackOf(y,x)))$
2.	$\neg \exists x \exists y BackOf(x,y)$
	$\forall x (Cube(x) \rightarrow \neg Large(x))$

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível. Existe mais do que uma interpretação que satisfaça S ? Justifique.

1. $B \rightarrow A$	5. $(B \wedge D) \rightarrow \perp$
2. $(A \wedge D) \rightarrow E$	6. $D \rightarrow E$
3. $D \rightarrow \perp$	7. $(A \wedge B) \rightarrow C$
4. $(B \wedge C) \rightarrow A$	8. $T \rightarrow B$

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$(A \vee B) \rightarrow C$
P2	$\neg C \vee D \vee E$
X	$A \rightarrow (D \vee E)$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) $\forall x ((\text{Cube}(x) \vee \neg \exists y \text{Larger}(y,x)) \rightarrow \exists z \text{SameCol}(z,x))$

b) $\forall x (\text{Large}(x) \rightarrow \forall y (\text{Cube}(y) \rightarrow \exists z \text{Between}(z,x,y)))$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \exists y (\text{FrontOf}(y,x) \wedge \neg \forall z \text{Between}(x,y,z)))$

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \exists y \text{BackOf}(x, y))$
P2	$\forall x (\exists y \text{BackOf}(x, y) \rightarrow (\text{Small}(x) \wedge \exists z \text{LeftOf}(x, z)))$
P3	$\forall x (\neg \text{Cube}(x) \rightarrow \text{Tet}(x))$
C	$\neg \exists x \exists y \text{LeftOf}(x, y) \rightarrow \forall x \text{Tet}(x)$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.6. (5 valores) Notando que

$$1 \cdot 2 = 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 / 3;$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8 = 2 \cdot 3 \cdot 4 / 3;$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20 = 3 \cdot 4 \cdot 5 / 3;$$

Mostre que, para qualquer $n \geq 1$ se verifica $S(n) = 1 \cdot 2 + \dots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

Passo Base :

Passo de Indução :