Lógica Computacional

- Aplicações da Lógica
  - Verificação de Programas,
  - Bases de Dados,
  - Sistemas inteligentes
- Programação em Lógica
- SAT e Programação com Restrições
- Exemplos

Programação em Lógica

- A lógica como linguagem de Programação
- Extensão de linguagens funcionais

  Funções: Relações (argumentos de entrada/saída)

  Chamadas de funções : Perguntas (queries)

Exemplo:

Listas definidas indutivamente: Uma lista é uma estrutura que

- **Claúsula Base:** é vazia (não tem elementos)
- **Cláusula de Indução:** é constituída por uma cabeça (H) e uma cauda (T) que é uma lista

Sintaticamente

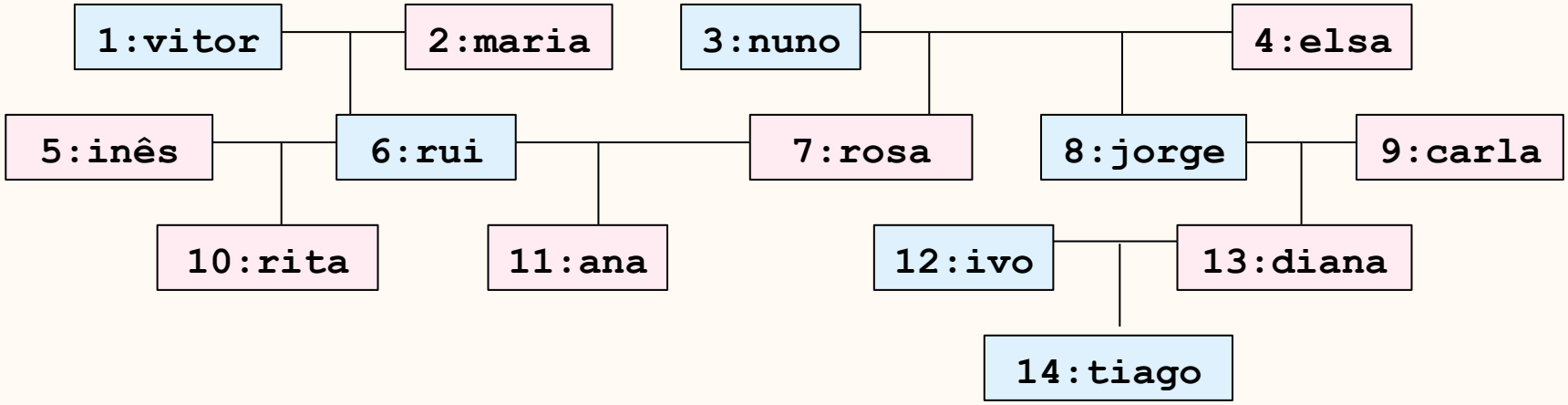
- Lista vazia: □ em Prolog: `[]`
- Lista não vazia: `•(H,T)` em Prolog: `[H|T]`

Programação em Lógica

- Exemplos de Tratamento de Listas

```
• mb(H,[H|_]).
• mb(X,[_|T]):- mb(X,T).

• cat([], L, L).
• cat([H|T], L, [H|R]):- cat(T,L,R).

• nrev([],[]).
• nrev([H|T],L):- nrev(T,R), cat(R,[H],L).

• prf(P,L):- cat(P,_,L).

• suf(L,L).
• suf(S,[_|T]):- suf(S,T).

• sub([H|T],[H|R]):- prf(T,R).
• sub(  S,  [_|R]):- sub(S,R).
```

Base de Conhecimentos: Família



Base de Dados - Tuplos em tabelas:

<Id,Nome,Sexo,Pai,Mãe)

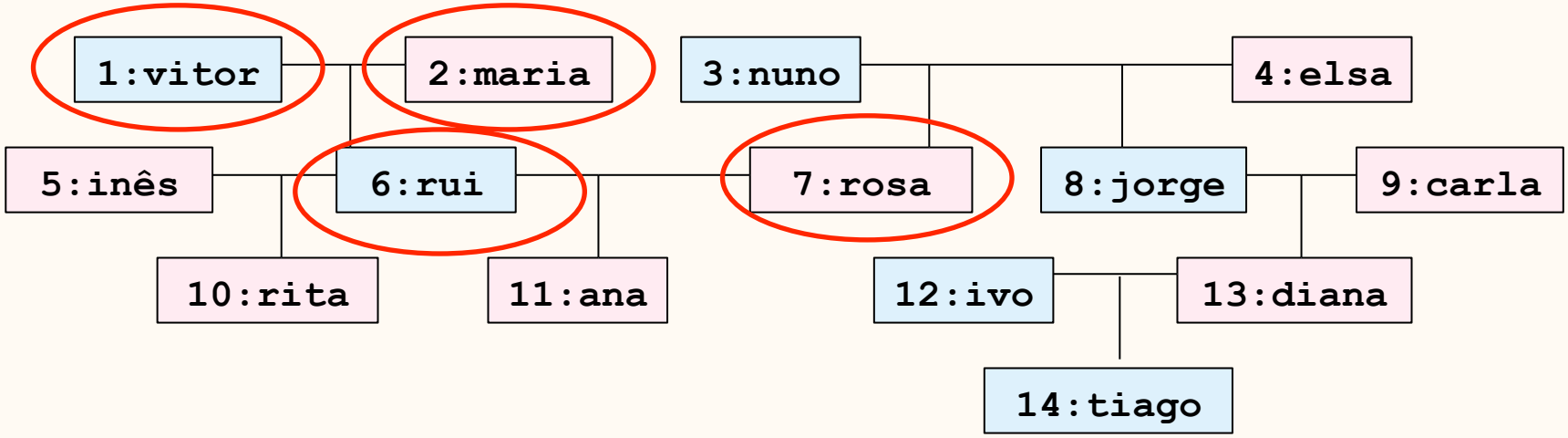
Base de Conhecimentos - Tuplos como Predicados

Pessoa(id,Nome,Sexo,Pai,Mãe)

Base de Conhecimentos: Família

Base de Conhecimentos - Tuplos como Predicados

Predicados representam propriedades/relações de/entre indivíduos.



- `pessoa(1,vitor,m,x,y).`
- `pessoa(2,maria,f,x,y).`
- …
- `pessoa(6,rui,m,vitor,maria).`
- `pessoa(7,rosa,f,nuno,elsa).`
- …

Base de Conhecimentos: Família

Outras relações podem ser inferidas lógicamente:

Directas:

```
∀i ∀x ∀y ∀z ∀w (Pessoa(i,x,y,z,w) -> PaiDe(z,x)).
```

- `paiDe(P,X):- pessoa(_,X,_,P,_), P \= x.`
- `maeDe(M,X):- pessoa(_,X,_,_,M), M \= y.`
- `prgDe(X,Y):- paiDe(X,Y).`
- `prgDe(X,Y):- maeDe(X,Y).`

- `filDe(X,Y) :- prgDe(Y,X).`

- `avoDe(A,N):- prgDe(A,X), prgDe(X,N).`
- `netDe(X,Y):- avoDe(Y,X).`

- `ascDe(X,Y):- prgDe(X,Y).`
- `ascDe(X,Y):- prgDe(X,Z),ascDe(Z,Y).`
- `dscDe(X,Y):- ascDe(Y,X).`

Base de Conhecimentos: Família

Outras relações que podem ser lógicamente inferidas:

"Laterais"

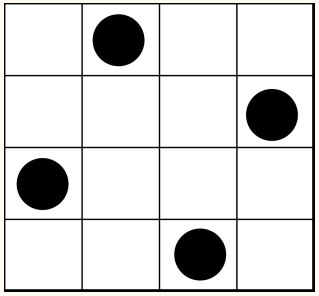
```
• irmDe(X,Y):- prgDe(Z,X), prgDe(Z,Y), X\= Y.
• tioDe(T,S):- irmDe(T,P), prgDe(P,S).

• casal(X,Y):- prgDe(X,Z),prgDe(Y,Z), X\= Y.
• sogDe(S,G):- prgDe(S,X), casal(X,G).
• genDe(G,S):- sogDe(S,G).

• prmDe(X,Y):- prgDe(Z,X), prgDe(W,Y), irmDe(Z,W).
• prmDe(X,Y,N) :- N = 1, prmDe(X,Y).
• prmDe(X,Y,N) :- N > 1, filDe(X,Z), M is N-1, prmDe(Y,Z,M).
• prmDe(X,Y,N) :- N > 1, prgDe(X,Z), M is N-1, prmDe(Y,Z,M).
```

Satisfazibilidade Booleana

Exemplo: 4-rainhas

Colocar 4 rainhas num tabuleiro de 4 X 4 de forma a que não se ataquem entre elas.

Solução possível:



```
Q12 = Q24 = Q31 = Q43 = T
Q11 = Q13 = Q14 = F
Q21 = Q22 = Q23 = F
Q32 = Q33 = Q34 = F
Q41 = Q42 = Q44 = F
```

Modelação: Através de 16 variáveis Booleanas

Q11	Q12	Q13	Q14
Q21	Q22	Q23	Q24
Q31	Q32	Q33	Q34
Q41	Q42	Q43	Q44

Satisfazibilidade Booleana

Exemplo: 4-rainhas

Cláusulas:

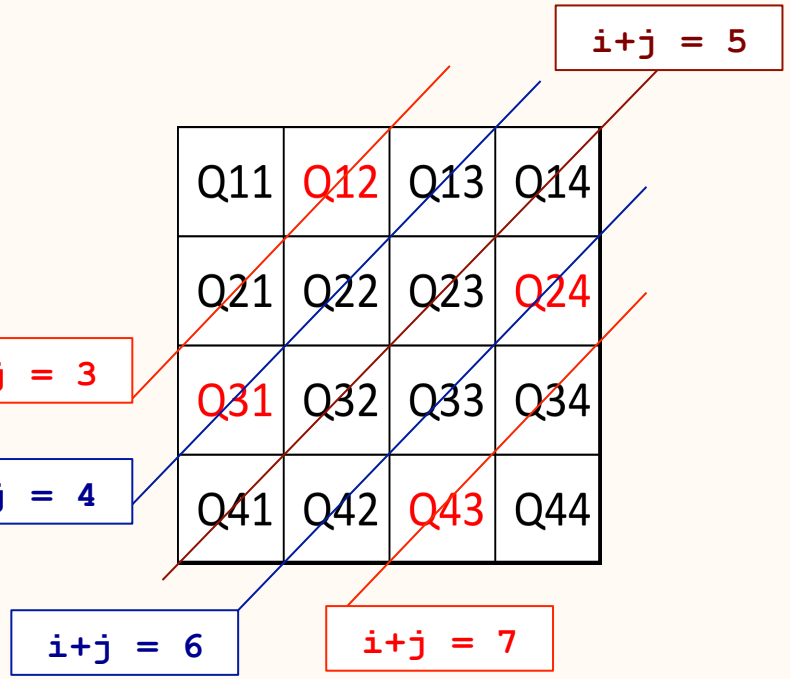
```
// Pelo menos uma rainha em cada linha
Q11 ∨ Q12 ∨ Q13 ∨ Q14
Q21 ∨ Q22 ∨ Q23 ∨ Q24
Q31 ∨ Q32 ∨ Q33 ∨ Q34
Q41 ∨ Q42 ∨ Q43 ∨ Q44

// No máximo uma rainha na linha 1
¬ Q11 ∨ ¬ Q12
¬ Q11 ∨ ¬ Q13
¬ Q11 ∨ ¬ Q14
¬ Q12 ∨ ¬ Q13
¬ Q12 ∨ ¬ Q14
¬ Q13 ∨ ¬ Q14
```

Q11	Q12	Q13	Q14
Q21	Q22	Q23	Q24
Q31	Q32	Q33	Q34
Q41	Q42	Q43	Q44

Satisfazibilidade Booleana

Exemplo: 4-rainhas

```
// No máximo uma rainha nas diagonais /
¬ Q21 ∨ ¬ Q12        i+j = 3
¬ Q31 ∨ ¬ Q22
¬ Q31 ∨ ¬ Q13        i+j = 4
¬ Q22 ∨ ¬ Q13
¬ Q41 ∨ ¬ Q32
¬ Q41 ∨ ¬ Q23
¬ Q41 ∨ ¬ Q14        i+j = 5
¬ Q32 ∨ ¬ Q23
¬ Q32 ∨ ¬ Q14
¬ Q23 ∨ ¬Q14
¬ Q42 ∨ ¬ Q33
¬ Q42 ∨ ¬ Q24        i+j = 6
¬ Q33 ∨ ¬ Q24
¬ Q43 ∨ ¬ Q34        i+j = 7
```



Satisfazibilidade Booleana

Exemplo: 4-rainhas (generalizável para n-raínhas

Número de variáveis: 16

Número de cláusulas:

1 cláusula n-ária por linha e coluna

6 cláusulas binárias por linha e coluna

14 cláusulas binárias por cada diagonal

Para uma dimensão arbitrária do tabuleiro (n-rainhas)

Número de variáveis: n^2

Número de cláusulas:

1 cláusula n-ária por linha e coluna

$n(n-2)/2$ cláusulas binárias por linha e coluna

$n^3/3 - n^2/2 + n/6$ cláusulas binárias por cada diagonal

n	número variáveis	n-árias	2-árias	
		linha/coluna	linha/coluna	diagonal
4	16	8	48	28
10	100	20	900	570
100	10 000	200	990 000	656 700
1000	1 000 000	2 000	999 000 000	665 667 000

Satisfazibilidade Booleana

n	número variáveis	n-árias linha/coluna	2-árias	
			linha/coluna	diagonal
4	16	8	48	28
10	100	20	900	570
100	10 000	200	990 000	656 700
1000	1 000 000	2 000	999 000 000	665 667 000

Resolver este problema, e outros problemas igualmente exponenciais, envolve tomar decisões. Neste caso existem n decisões a tomar (uma para cada linha), cada uma com n hipóteses alternativas.

No pior caso, este problema teria assim uma complexidade exponencial de ordem $O(n^n)$ o que torna impossível a sua resolução "ao calhas".

Este problema é pois um exemplo (*imperfeito*) de um problema de satisfação Booleana (SAT) conhecido por ser representativo de uma classe de problemas combinatórios (NP-completos).

E no entanto, este problema pode ser resolvido em poucos segundos, mesmo com valores elevados de n : por exemplo n = 1000!

Programação com Restrições

SAT é um caso particular de Programação com Restrições em que:

- as variáveis tomam valores Booleanos; e
- as restrições correspondem a cláusulas.

Em muitos casos, é referível usar linguagens mais expressivas (e eficientes) em que as variáveis podem tomar valores finitos e as restrições são mais variadas (aritméticas, diferença, contagens, etc.)

Por exemplo, o problemas das n-rainhas pode ser especificado como

```
Solver<CP> cp();
    range R = 1..1000;
    var q[S](cp,S);
solve<cp> {
    cp.post(alldifferent(q));
    cp.post(alldifferent(all(i in S) q[i] + i));
    cp.post(alldifferent(all(i in S) q[i] - i));
}
```

Programação com Restrições