

Lógica Computacional

Demonstrações de alguns Teoremas em DN

Conversão entre Implicações e Disjunções

Negações e Implicações

Negações e Equivalências

Implicações Triviais

- Implicação Trivial $\{ B \} \vdash A \rightarrow B$

1	B	
2	A	
3	B	Reit : 1
4	A \rightarrow B	Intr \rightarrow : 2-3

Implicação Trivial $\{ \neg A \} \vdash A \rightarrow B$

1	$\neg A$	
2	A	
3	\perp	Intr \perp : 1,2
4	B	Elim \perp : 3
5	A \rightarrow B	Intr \rightarrow : 2-3

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Conversão $\{ A \rightarrow B \} \vdash \neg A \vee B$

1	$A \rightarrow B$	
2	$\neg(\neg A \vee B)$	
3	$\neg A$	
4	$\neg A \vee B$	Intr \vee : 3
5	\perp	Intr \perp : 2, 4
6	$\neg\neg A$	Intr \neg : 3 - 5
7	A	Elim \neg : 6
8	B	Elim \rightarrow : 1, 7
9	$\neg A \vee B$	Intr \vee : 8
10	\perp	Intr \perp : 2, 9
11	$\neg\neg(\neg A \vee B)$	Intr \neg : 2 - 10
12	$\neg A \vee B$	Elim \neg : 11

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Conversão $\{\neg A \vee B\} \vdash A \rightarrow B$

1	$\neg A \vee B$	
2	A	
3	$\neg A$	
4	\perp	Intr \perp : 2 , 3
5	B	Elim \perp : 4
6	B	
7	B	Reit: 6
8	B	Elim \vee : 1 , 3 - 5, 7 - 8
9	$A \rightarrow B$	Intr \rightarrow : 1 - 8

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Meio Excluído $\{ \} \vdash A \vee \neg A$

1			
2		$\neg (A \vee \neg A)$	
3			
4			$A \vee \neg A$ Intr \vee : 2
5			\perp Intr \perp : 2, 4
6		$\neg A$	Intr \neg : 3 - 5
7		$A \vee \neg A$	Intr \vee : 6
8		\perp	Intr \perp : 2, 7
9		$\neg \neg (A \vee \neg A)$	Intr \neg : 2 - 8
10		$A \vee \neg A$	Elim \neg : 9

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Meio Excluído $\{ \} \vdash A \vee \neg A$

1			A	
2			A	Reit : 1
3			$A \rightarrow A$	Intr \rightarrow : 1 - 2
4			$A \vee \neg A$	Conversão: 3

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Resolução $\{ A \vee B, \neg B \vee C \} \vdash A \vee C$

1	$A \vee B$	
2	$\neg B \vee C$	
<hr/>		
3	A	
4	$A \vee C$	Intr \vee : 3
5	B	
<hr/>		
6	$\neg B$	
7	\perp	Intr \perp : 5 , 6
8	C	Elim \perp : 7
9	C	
<hr/>		
10	C	Reit: 9
11	C	Elim \vee : 2 , 6 - 9 , 10 - 11
12	$A \vee C$	Intr \vee : 11
13	$A \vee C$	Elim \vee : 1 , 3 - 4 , 5 - 12

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Resolução $\{ A \vee B, \neg B \vee C \} \vdash A \vee C$

1	$A \vee B$	
2	$\neg B \vee C$	
<hr/>		
3	$\neg A \rightarrow B$	Conversão: 1
4	$B \rightarrow C$	Conversão: 2
5	$\neg A$	
<hr/>		
6	B	Elim \rightarrow : 3 , 5
7	C	Elim \rightarrow : 4 , 6
8	$\neg A \rightarrow C$	Intr \rightarrow : 5 - 7
9	$A \vee C$	Conversão: 8

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Contrapositiva $\rightarrow \{ A \rightarrow B \} \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

1	$A \rightarrow B$	
2	$\neg B$	
3	A	
4	B	Elim \rightarrow : 1 , 3
5	\perp	Intr \perp : 2 , 4
6	$\neg A$	Intr \neg : 3 - 5
7	$\neg B \rightarrow \neg A$	Intr \rightarrow : 2 - 6

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Contrapositiva $\rightarrow \{ \neg A \rightarrow \neg B \} \vdash B \rightarrow A$

1	$\neg A \rightarrow \neg B$	
2	B	
3	$\neg A$	
4	$\neg B$	Elim \rightarrow : 1 , 3
5	\perp	Intr \perp : 2 , 4
6	$\neg\neg A$	Intr \neg : 3 - 5
7	A	Elim \neg : 6
8	B \rightarrow A	Intr \rightarrow : 2 - 7

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Negação \rightarrow

$$\{ \neg (A \rightarrow B) \} \vdash A \wedge \neg B$$

1	$\neg (A \rightarrow B)$	
2	B	
3	A	
4	B	Reit : 2
5	A \rightarrow B	Intr \rightarrow : 3 - 4
6	\perp	Intr \perp : 1 , 5
7	$\neg B$	Intr \neg : 2 - 6
8	$\neg A$	
9	A	
10	\perp	Intr \perp : 8 , 9
11	B	Elim \perp : 9 - 10
12	A \rightarrow B	Intr \rightarrow : 9 - 11
13	\perp	Intr \perp : 1 , 12
14	$\neg \neg A$	Intr \neg : 8 - 13
15	A	Elim \neg : 14
16	A \wedge $\neg B$	Intr \wedge : 7 , 15

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Negação \rightarrow

$\{A \wedge \neg B\} \vdash \neg(A \rightarrow B)$

1	$A \wedge \neg B$	
2	$A \rightarrow B$	
3	A	Elim \wedge : 1
4	B	Elim \rightarrow : 2 , 3
5	$\neg B$	Elim \wedge : 1
6	\perp	Intr \perp : 4 , 5
7	$\neg(A \rightarrow B)$	Intr \neg : 2 - 6

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Contrapositiva $\leftrightarrow \{ A \leftrightarrow B \} \vdash \neg A \leftrightarrow \neg B$

1	$A \leftrightarrow B$	
2	$\neg A$	
3	B	
4	A	Elim \leftrightarrow : 1 , 3
5	\perp	Intr \perp : 2 , 4
6	$\neg B$	Intr \neg : 3 - 5
7	$\neg B$	
8	A	
9	B	Elim \leftrightarrow : 1 , 8
10	\perp	Intr \perp : 7 , 9
11	$\neg A$	Intr \neg : 8 - 10
12	$\neg A \leftrightarrow \neg B$	Intr \leftrightarrow : 2 - 6 , 7 - 11

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Contrapositiva $\Leftrightarrow \{ \neg A \Leftrightarrow \neg B \} \vdash A \Leftrightarrow B$

1	$\neg A \Leftrightarrow \neg B$	
2	A	
3	$\neg B$	
4	$\neg A$	$\text{Elim } \Leftrightarrow : 1, 3$
5	\perp	$\text{Intr } \perp : 2, 4$
6	$\neg\neg B$	$\text{Intr } \neg : 3 - 5$
7	B	$\text{Elim } \neg : 6$
8	B	
9	$\neg A$	
10	$\neg B$	$\text{Elim } \Leftrightarrow : 1, 9$
11	\perp	$\text{Intr } \perp : 8, 10$
12	$\neg\neg A$	$\text{Intr } \neg : 9 - 11$
13	A	$\text{Elim } \neg : 12$
14	$A \Leftrightarrow B$	$\text{Intr } \Leftrightarrow : 2 - 7, 8 - 13$

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Negação \leftrightarrow

$$\{\neg(A \leftrightarrow B)\} \vdash A \leftrightarrow \neg B$$

1	¬ (A ↔ B)	
2	A	
3	B	
4	A	
5	B	Reit : 3
6	B	
7	A	Reit : 2
8	A ↔ B	Intr ↔: 4 - 5 , 6 - 7
9	⊥	Intr ⊥ : 1 , 8
10	¬B	Intr ¬ : 3 - 9
11	¬B	
...	...	
19	A	
20	A ↔ ¬B	Intr ↔: 2 - 10 , 11 - 19

Teoremas relacionando Implicações e Disjunções

- Negação \leftrightarrow

$\{A \leftrightarrow \neg B\} \vdash \neg(A \leftrightarrow B)$

1.	$A \leftrightarrow \neg B$	
2.	$A \leftrightarrow B$	
3.	A	
4.	B	Elim \leftrightarrow : 2 , 3
5.	$\neg B$	Elim \leftrightarrow : 1 , 3
6.	\perp	Intr \perp : 4 , 5
7.	$\neg A$	Intr \neg : 3 - 6
8.	B	
9.	A	Elim \leftrightarrow : 2 , 8
10.	\perp	Intr \perp : 7 , 9
11.	$\neg B$	Intr \neg : 8 - 10
12.	A	Elim \leftrightarrow : 1 , 11
13.	\perp	Intr \perp : 7 , 12
14.	$\neg(A \leftrightarrow B)$	Intr \neg : 2 - 12

Teoremas relacionando Equivalências e Negações

- Encadeamento de Equivalências

$$\{ A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \} \vdash \neg A \leftrightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$$

1	$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$	
2	$\neg A \leftrightarrow \neg (B \leftrightarrow C)$	Contrapositiva \leftrightarrow : 1
3	$\neg A$	
4	$\neg (B \leftrightarrow C)$	Elim \leftrightarrow : 2 , 3
5	$B \leftrightarrow \neg C$	Negação \leftrightarrow : 4
6	$B \leftrightarrow \neg C$	
7	$\neg (B \leftrightarrow C)$	Negação \leftrightarrow : 6
8	$\neg A$	Elim \leftrightarrow : 2 , 7
9	$\neg A \leftrightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$	Intr \leftrightarrow : 3 - 5 , 6 - 8

Teoremas relacionando Equivalências e Negações

- Encadeamento de Equivalências

$$\{ \neg A \leftrightarrow (B \leftrightarrow \neg C) \} \vdash A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

1	$\neg A \leftrightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$	
2	$A \leftrightarrow \neg (B \leftrightarrow \neg C)$	Contrapositiva \leftrightarrow : 1
3	A	
4	$\neg (B \leftrightarrow \neg C)$	Elim \leftrightarrow : 2 , 3
5	$B \leftrightarrow C$	Negação \leftrightarrow : 4
6	$B \leftrightarrow C$	
7	$\neg (B \leftrightarrow \neg C)$	Negação \leftrightarrow : 6
8	A	Elim \leftrightarrow : 2 , 7
9	$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$	Intr \leftrightarrow : 3 - 5 , 6 - 8