

Lógica Computacional

Demonstrações Formais

Dedução Natural

Introdução e Eliminação da Negação

Introdução e Eliminação da Contradição

Negação e Contradição

- Antes de apresentarmos as regras da negação no sistema de dedução natural, relembremos que no raciocínio por absurdo se pretende atingir uma contradição a partir de uma hipótese que pretendemos provar como sendo falsa.
- Geralmente a contradição é atingida quando na mesma demonstração se tem uma fórmula φ a sua “oposta”, $\neg\varphi$.
- Em princípio, esta verificação seria suficiente. No entanto para tornar mais simples o sistema e separar a obtenção da contradição da negação da hipótese, introduz-se um novo símbolo proposicional, \perp , de contradição (ou *bottom*) que como o nome indica é falso em qualquer interpretação que se considere para os símbolos proposicionais utilizados.
- Tal como para o predicado de igualdade, e ainda para os operadores Booleanos de conjunção e de disjunção, o sistema de Dedução Natural define regras de introdução e de eliminação da contradição.

Introdução da Contradição

- No sistema de **Dedução Natural**, a contradição é introduzida após a detecção de uma fórmula e da sua negação, como referido atrás.

Introdução da \perp

k1		...	
		φ	
		...	
k2		$\neg\varphi$	
		...	
k		\perp	Intr \perp: k1, k2

Nota:
k > k1
k > k2

- Estamos agora em condições de apresentar as regras da negação, deixando a regra de eliminação da contradição para mais tarde.

Eliminação da Negação

- A regra de eliminação da negação corresponde à conhecida equivalência entre uma fórmula e sua dupla negação, e é definida da seguinte forma.

Eliminação da \neg

		...	
k1		$\neg \neg \varphi$	
		...	
k2		φ	Elim \neg: k1
		...	

Nota:
k2 > k1

- Sendo φ e $\neg \neg \varphi$ fórmulas equivalentes, poder-se-ia ser tentado a considerar como regra de introdução da negação a inferência de $\neg \neg \varphi$ a partir da fórmula φ .
- No entanto esta regra não introduziria o raciocínio por absurdo como um novo método de introdução da negação. Como veremos, ele torna redundante a existência de uma regra de inferência da fórmula $\neg \neg \varphi$ a partir da fórmula φ .

Introdução da Negação

- A introdução da negação corresponde pois ao raciocínio por absurdo, que como vimos pretende inferir uma contradição a partir de uma fórmula “duvidosa”, demonstrando-se assim a negação dessa fórmula. Esquemáticamente,

Introdução da \neg

	...		
k1	φ		
	———		
	...		
k2	\perp		
k	$\neg\varphi$	Intr \neg : k1-k2	
	...		

Nota:
k2 > k1
k > k2

Tal como na disjunção, a introdução da negação assume uma hipótese φ que não necessita de ser justificada. De facto ela não poderia ser justificada com base nas anteriores pois pretende-se provar exactamente que ela é falsa!

Introdução da Negação

- Com esta regra de introdução pode facilmente obter-se a pseudo-regra de introdução que tínhamos referido, para se inferir $\neg\neg\varphi$ a partir da fórmula φ .
- Essa demonstração pode ser feita como indicado de seguida:

k1		φ	
		...	
m1			
		$\neg\varphi$	
m2		\perp	Intr \perp: k1, m1
k2		$\neg\neg\varphi$	Intr \neg: m1-m2
		...	

- Estamos agora em condições de apresentar a regra de eliminação da contradição.

Eliminação da Contradição

- Como já analisamos na análise da argumentação, uma conclusão era válida se todas as interpretações que tornassem verdadeiras as premissas tornassem verdadeira a conclusão.
- Um caso especial ocorre quando as premissas são sempre falsas, isto é, quando não é possível valorar (com V ou F) as fórmulas atômicas que aparecem nas premissas de forma a torná-las todas verdadeiras.
- Neste caso, assumimos que a **argumentação era válida**, embora obviamente **não fosse sólida**.
- Naturalmente tal não indica que uma fórmula seja verdadeira, mas apenas que num **contexto em que existe uma contradição qualquer fórmula pode ser deduzida!**
- Assim sendo, e porque se pretende que o sistema de dedução seja completo, as suas regras de inferência deverão permitir demonstrar as conclusões obtidas com argumentos válidos, o que justifica a regra de eliminação da contradição.

Eliminação da Contradição

- Esta regra de eliminação corresponde à situação descrita atrás de que a partir de premissas falsas a fórmula φ pode ser demonstrada, qualquer que ela seja!

Eliminação da \perp

$k1$	\dots	
	\perp	
	\dots	
$k2$	φ	Elim \perp: k1
	\dots	

- Tal como a introdução, também a regra de eliminação da \perp é redundante, sendo no entanto mantida no sistema para o tornar mais “simples”. Com efeito, as regras de negação seriam suficientes para se atingir o mesmo efeito.

k	\perp	
$m1$	$\neg\varphi$	
$m2$	\perp	Reit : k
$k1$	$\neg\neg\varphi$	Intr \neg: m1-m2
$k2$	φ	Elim \neg: k1

Leis de de Morgan - Negação da Conjunção

- Uma vez definidas as regras da negação e da contradição que lhe estão associadas, podemos verificar que elas são suficientes, em conjunto com as da conjunção e da disjunção, para demonstrar as leis de de Morgan.

$$\neg (A \vee B) \models \neg A \wedge \neg B$$

1	$\neg (A \vee B)$	
2	A	
3	$A \vee B$	Intr \vee : 2
4	\perp	Intr \perp : 1,3
5	$\neg A$	Intr \neg : 2-4
6	B	
7	$A \vee B$	Intr \vee : 6
8	\perp	Intr \perp : 1,7
9	$\neg B$	Intr \neg : 6-8
10	$\neg A \wedge \neg B$	Intr \wedge : 5,9

Leis de de Morgan - Negação da Conjunção

$$\neg A \wedge \neg B \models \neg(A \vee B)$$

1	$\neg A \wedge \neg B$	
2	$\neg A$	Elim \wedge : 1
3	$\neg B$	Elim \wedge : 1
4	$A \vee B$	
5	A	
6	\perp	Intr \perp : 2,5
7	B	
8	\perp	Intr \perp : 3,7
9	\perp	Elim \vee : 4, 5-6, 7-8
10	$\neg(A \vee B)$	Intr \neg : 4-9

Heurísticas

- Para demonstrar as fórmulas pretendidas há que utilizar algumas estratégias para se obter a sequência adequada de fórmulas que constituem a demonstração. Para esse efeito há que ter em conta algumas “regras” já seguidas atrás
- 1. Entender bem o que se pretende demonstrar
 - A partir deste entendimento poder-se-ão ...
- 2. Estabelecer fórmulas intermédias, para “ancorar” a demonstração
 - Muito úteis para conjunções, e não só, como vimos e veremos
- 3. Heurísticas genéricas:
 - i. **Conjunções:** Se se pretende demonstrar $\varphi \wedge \psi$ demonstrar separadamente as fórmulas φ e ψ ;
 - ii. **Negações:** Se se pretende demonstrar $\neg\varphi$ demonstrar que φ é “absurdo”;
 - iii. **Disjunções:** Se se pretende demonstrar $\varphi \vee \psi$ tentar demonstrar um deles;
 - iv. **Em “desespero”:** Usar o raciocínio por absurdo.
- Alguns exemplos ilustrarão este processo.

Leis de de Morgan - Negação da Disjunção

$$\neg A \vee \neg B \models \neg(A \wedge B)$$

1	$\neg A \vee \neg B$	
2	$A \wedge B$	
3	$\neg A$	
4	A	Elim \wedge : 2
5	\perp	Intr \perp : 3,4
6	$\neg B$	
7	B	Elim \wedge : 2
8	\perp	Intr \perp : 6,7
9	\perp	Elim \vee : 1, 3-5, 6-8
10	$\neg(A \wedge B)$	Intr \neg : 2-9

Leis de de Morgan - Negação da Disjunção

$$\neg (A \wedge B) \models \neg A \vee \neg B$$

1	$\neg (A \wedge B)$	
2	$\neg (\neg A \vee \neg B)$	
3	$\neg A$	
4	$\neg A \vee \neg B$	Intr \vee : 3
5	\perp	Intr \perp : 2,4
6	$\neg\neg A$	Intr \neg : 3-5
7	A	Elim \neg : 6
8	$\neg B$	
9	$\neg A \vee \neg B$	Intr \vee : 8
10	\perp	Intr \perp : 2,9
11	$\neg\neg B$	Intr \neg : 8-10
12	B	Elim \neg : 11
13	$A \wedge B$	Intr \wedge : 7,12
14	\perp	Intr \perp : 1,13
15	$\neg\neg (\neg A \vee \neg B)$	Intr \neg : 2-14
16	$\neg A \vee \neg B$	Elim \neg : 15

Tautologias

- Na demonstração de tautologias, por não haver premissas, a única regra aplicável (por agora) do sistema de Dedução Natural é a regra de Introdução da Negação.
- Tal como anteriormente, na demonstração vão-se estabelecendo fórmulas intermédias e descobrindo o encadeamento de regras até as atingir.
- O processo de “construção” da demonstração pode ser ilustrado como se segue para a tautologia $A \vee \neg A$.

1	<div style="border-bottom: 1px solid black; padding-bottom: 5px;">$\neg (A \vee \neg A)$</div>	
2	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</div>	
3	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> <div style="border-bottom: 1px solid black; padding-bottom: 5px;">$A \vee \neg A$</div> </div>	Intr \vee : 2
4	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">\perp</div>	Intr \perp : 1,3
5	$\neg A$	Intr \neg : 2-4
6	$A \vee \neg A$	Intr \vee : 5
7	\perp	Intr \perp : 1,6
8	$\neg\neg (A \vee \neg A)$	Intr \neg : 1-7
9	$A \vee \neg A$	Elim \neg : 8