Lógica Computacional

Demonstrações Formais

Dedução Natural

Introdução e Eliminação da Conjunção

Introdução e Eliminação da Disjunção

Demonstrações Formais

- A análise do raciocínio feito durante as demonstrações feitas anteriormente e envolvendo conjunções e disjunções podem ser agora formalizados em regras de inferência usadas no sistema formal de Dedução Natural.

- Como explicado anteriormente uma demonstração é uma sequência Γ de fórmulas,
  - iniciada por um conjunto de fórmulas Φ que não necessitam de justificação (as premissas);
  - continuada por fórmulas justificadas por regras de inferência do sistema, aplicadas a fórmulas anteriores na sequência;
  - Sendo a última fórmula, φ, a que se pretende demonstrar.

- Vários sistemas de dedução (ou de demonstração) têm sido propostos e estudados, que se distinguem entre si pela linguagem em que se podem escrever as fórmulas de Γ e pelas regras de inferência utilizadas.

- Vamos estar naturalmente interessados na linguagem das fórmulas de 1ª ordem (FPOs) já definidas a partir de fórmulas atómicas e dos operadores Booleanos de conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$) e negação ($\neg$).

Demonstrações e Sistemas de Dedução

- Em geral, estaremos interessados em saber se a partir de um conjunto de premissas Φ é possível demonstrar uma fórmula φ no sistema de dedução X, usando as regras de inferência desse sistema X, o que denotaremos por

$$\Phi \vdash_X \varphi$$

- Obviamente, para um sistema ser útil as suas regras de inferência deverão ser de alguma forma adequadas.

- Em particular, estaremos interessados em utilizar sistemas de dedução que sejam **coerentes** e **completos**, ou seja em que se possam estabelecer as seguinte relações entre formulas demonstráveis no sistema X e conclusões válidas:

  - Coerência: $\Phi \vdash_X \varphi \implies \Phi \models \varphi$

  - Completude: $\Phi \models \varphi \implies \Phi \vdash_X \varphi$

- Este é o caso do sistema de **Dedução Natural** em que, como o nome indica, as regras de inferência tentam captar as formas de raciocínio usadas “no dia a dia”.

Introdução e Eliminação da Conjunção

- Neste sistema, e como vimos nos exemplos anteriores de argumentação em língua natural, o raciocínio pode ser formalizado através de regras de **Introdução** e de **Eliminação** dos operadores Booleanos (tal como já tinha sido feito com o predicado de igualdade).

- No sistema de **Dedução Natural**, as regras de introdução e eliminação da conjunção são as seguintes

Introdução da ∧

```
   | ...
k1 | φ
   | ...
k2 | ϕ
   | ...
k  | φ ∧ ϕ     Intr ∧: k1,k2
```

Nota:
k > k1
k > k2

Eliminação da ∧

```
   | ...
k  | φ ∧ ϕ
   | ...
k1 | φ         Elim ∧: k
   | ...
k2 | ϕ         Elim ∧: k
```

Nota:
k1 > k
k2 > k

Introdução e Eliminação da Conjunção

Estas regras permitem naturalmente formalizar os raciocínios feitos anteriormente.

Exemplo:

```
1 | A Maria é alta
2 | O João é baixo
  |-----------------------------
3 | A Maria é alta e o João é baixo
```

```
1 | Alta(maria)
2 | Baixo(joão)
  |-----------------------------
3 | Alta(maria)∧ Baixo(joão)      Intr ∧: 1,2
```

Introdução da Disjunção

- A regra de introdução da disjunção é definida da seguinte forma.

Introdução da ∨

```
     | ...
k    | φ
     | ...
k1   | φ ∨ ϕ      Intr ∨: k
     | ...
k2   | ϕ ∨ φ      Intr ∨: k
     |
```

```
Nota:
   k1 > k
   k2 > k
```

Introdução da Disjunção

- Como vimos anteriormente, ao invés da conjunção, a introdução da disjunção permite concluir uma fórmula mais "fraca" do que a fórmula de partida, como se pode notar no exemplo seguinte.

Exemplo:

```
1 | A Maria é alta
  |--------------------------------
2 | A Maria é alta ou o João é baixo
```

```
1 | Alta(maria)
  |------------------------------
2 | Alta(maria)v Baixo(joão)        Intr v: 1
```

```
1 | Alta(maria)
  |------------------------------
2 | Baixo(joão) v Alta(maria)       Intr v: 1
```

Eliminação da Disjunção

- A eliminação da disjunção é a regra do sistema de dedução natural que capta o raciocínio por casos. É definida como se segue.

Eliminação da $\vee$

k1	$\varphi \vee \psi$	
m1	φ	
	...	
m2	ρ	
n1	ψ	
	...	
n2	ρ	
k2	ρ	Elim $\vee$: k1, m1-m2, n1-n2

Nota:
m1 > k1
m2 > m1
n1 > k1
n2 > n1
k2 > m2
k2 > n2

Distribuição da $\wedge$ em Relação à $\vee$

- A partir destas regras poderemos verificar que certas regras de equivalência são demonstráveis no sistema DN. Em particular poderemos demonstrar as regras da distribuição envolvendo disjunções e conjunções

$$A \wedge (B \vee C) \models (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

1	$A \wedge (B \vee C)$	
2	A	Elim $\wedge$: 1
3	$B \vee C$	Elim $\wedge$: 1
4	B	
5	$A \wedge B$	Intr $\wedge$: 2,4
6	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Intr $\vee$: 5
7	C	
8	$A \wedge C$	Intr $\wedge$: 2,7
9	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Intr $\vee$: 8
10	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Elim $\vee$: 3,4-6,7-9

Distribuição da $\wedge$ em Relação à $\vee$

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \models A \wedge (B \vee C)$$

1	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	
2	$A \wedge B$	
3	A	Elim $\wedge$: 2
4	B	Elim $\wedge$: 2
5	$B \vee C$	Intr $\vee$: 4
6	$A \wedge (B \vee C)$	Intr $\wedge$: 3,5
7	$A \wedge C$	
8	A	Elim $\wedge$: 7
9	C	Elim $\wedge$: 7
10	$B \vee C$	Intr $\vee$: 9
11	$A \wedge (B \vee C)$	Intr $\wedge$: 8,10
12	$A \wedge (B \vee C)$	Elim $\vee$: 1,2-6,7-11

Distribuição da $\vee$ em Relação à $\wedge$

$$A \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

1	$A \vee (B \wedge C)$	
2	A	
3	$A \vee B$	Intr $\vee$: 2
4	$A \vee C$	Intr $\vee$: 2
5	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Intr $\wedge$: 3,4
6	$B \wedge C$	
7	B	Elim $\wedge$: 6
8	$A \vee B$	Intr $\vee$: 7
9	C	Elim $\wedge$: 6
10	$A \vee C$	Intr $\vee$: 9
11	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Intr $\wedge$: 8,10
12	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Elim $\vee$: 1,2-5,6-11

Distribuição da $\vee$ em Relação à $\wedge$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \models A \vee (B \wedge C)$$

1	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
2	$A \vee B$	Elim $\wedge$: 1
3	$\quad A$	
4	$\quad A \vee (B \wedge C)$	Intr $\vee$: 3
5	$\quad B$	
6	$\quad A \vee C$	Elim $\wedge$: 1
7	$\quad\quad A$	
8	$\quad\quad A \vee (B \wedge C)$	Intr $\vee$: 7
9	$\quad\quad C$	
10	$\quad\quad B \wedge C$	Intr $\wedge$: 5,9
11	$\quad\quad A \vee (B \wedge C)$	Intr $\vee$: 10
12	$\quad A \vee (B \wedge C)$	Elim $\vee$: 6,7-8,9-11
13	$A \vee (B \wedge C)$	Elim $\vee$: 2,3-4,5-12

Visibilidade em Sub-Demonstrações

- Na aplicação das regras indicadas há que ter bastante cuidado com a visibilidade de fórmulas dentro das sub-demonstrações.

- Caso contrário podem cometer-se alguns erros óbvio como se pode ver no seguinte exemplo:

$$\{ B,\ A \lor B \} \models A \land B \quad ???$$

1	B		
2	A ∨ B		
3	A		
4	A ∧ B		Intr ∧: 1,3
5	B	?	
6	A ∧ B		Intr ∧: ~~3~~,5
7	A ∧ B		Elim ∨: 2,3-4,5-6

Importante: Dentro de uma sub-demonstração só se vêem as fórmulas das sub-demonstrações que a contêm.