

Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2013 / 14 – 1º Teste de Avaliação (sem Consulta)

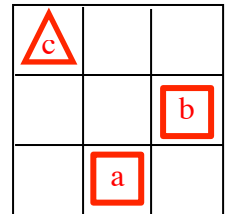
Nome:

nº:

1. Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3×3 casas)

a) Desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes fórmulas

1. $\text{BackOf}(c, a) \wedge \text{BackOf}(c, b)$
2. $\text{SameShape}(a, c) \vee \text{SameShape}(a, b)$
3. $\neg (\text{Cube}(c) \vee \text{Dodec}(c)) \wedge \text{Cube}(b)$
4. $\text{FrontOf}(a, b) \wedge \text{LeftOf}(c, a) \wedge \text{LeftOf}(a, b)$



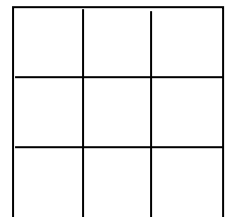
b) Verifique se a fórmula $\text{Between}(a, b, c) \vee \text{Between}(b, a, c) \vee \text{Between}(c, a, b)$ é satisfazível em conjunto com as anteriores. Se sim indique um mundo em que todas as fórmulas sejam satisfeitas; caso contrário explique sucintamente porquê.

A fórmula obriga os blocos **a**, **b** e **c** a estarem alinhados, estando um deles entre os outros 2.

Ora o bloco **c** está atrás dos outros 2 (por 1) e o bloco **a** está à frente do bloco **b** (por 4), estando assim o bloco **b** numa linha entre a linha do bloco **a** e a do bloco **c**.

Mas os blocos não estão na mesma coluna (por 4). Assim, para estarem alinhados seria necessário (mas não suficiente) que os blocos **b** e **c** estivessem ambos à esquerda ou ambos à direita do bloco **a**, o que não sucede (por 4).

é possível porque **d** é um tetraedro.



2. Traduza as seguintes frases para fórmulas na linguagem do Mundo de Tarski.

a) Os blocos **a** e **b** são ambos cubos ou nenhum deles o é.

$(\text{Cube}(a) \wedge \text{Cube}(b)) \vee \neg (\text{Cube}(a) \vee \text{Cube}(b))$

b) Nenhum dos tetraedro **a** e **b** é maior que o outro.

$\text{Tet}(a) \wedge \text{Tet}(b) \wedge \text{SameSize}(a, b)$

c) O blocos **a** está entre os blocos **b** e **c**, mas os blocos não estão na mesma linha.

$\text{Between}(a, b, c) \wedge \neg \text{SameRow}(a, b)$

d) O dodecaedro **d** não é maior que ambos os blocos **a** e **b**.

$\text{Dodec}(d) \wedge \neg (\text{Larger}(d, a) \wedge \text{Larger}(d, b))$

3. Considere as seguintes frases

- O responsável pela disciplina de Análise não é o mesmo do da disciplina de Álgebra.
- A disciplina de Análise é leccionada ou na sala p13 ou na q10.
- Há mais alunos em Análise que em Álgebra.
- O Rui é aluno de Análise mas não de Álgebra.

a) Apresente uma assinatura $\Sigma = \langle NP, NF_0 \cup NF_1 \rangle$ de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0 : Constantes	NF_1 : Funções	NP : Predicados
álgebra análise p13 q10 rui	responsável/1 numAlunos/1	SalaDe/2 >/2 =/2 AlunoDe/2

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O responsável pela disciplina de "Análise" não é o mesmo do da disciplina de "Álgebra".

$\neg (\text{responsável}(\text{álgebra}) = \text{responsável}(\text{análise}))$

ii) A disciplina de Análise é leccionada ou na sala p13 ou na q10.

$\text{SalaDe}(\text{análise}, \text{p13}) \vee \text{SalaDe}(\text{análise}, \text{q10})$

iii) Há mais alunos em Análise que em Lógica.

$\text{numAlunos}(\text{análise}) > \text{numAlunos}(\text{álgebra})$

iv) O Rui é aluno de Análise mas não de Álgebra.

$\text{AlunoDe}(\text{rui}, \text{análise}) \wedge \neg \text{AlunoDe}(\text{rui}, \text{álgebra})$

4. a) Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica;

V-FO: Verdade Lógica

V-TW: Verdade Analítica (Tarski)

P-TT: Possibilidade Tautológica;

P-FO: Possibilidade Lógica;

P-TW: Verdade Analítica (Tarski)

$a = b \wedge \neg (\text{Tet}(a) \vee \neg \text{Tet}(b))$
 $\neg (a = b) \vee (\text{Large}(a) \vee \text{Medium}(b) \vee \text{Small}(a))$
 $\text{Larger}(a, b) \wedge \text{Smaller}(a, b)$

V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
N	N	N	S	N	N
N	N	S	S	S	S
N	N	N	S	S	N

b) Indique, se houver, uma proposição V-TT mas apenas P-TW (i.e. não V-TW). Caso contrário escreva impossível.

Impossível

c) Indique, se houver, uma proposição V-TW mas não V-TT. Caso contrário escreva impossível.

$\text{Small}(a) \vee \text{Medium}(a) \vee \text{Large}(a)$

5. Para os argumentos abaixo, indique se são válidos, justificando informalmente a resposta.

a) Nem tudo o que brilha é de ouro. Este anel não brilha. Logo este anel não é de ouro.

Não Válido:

A primeira premissa apenas indica que existem objectos que brilham (luzem) e não são de ouro, mas não força os objectos que não brilham a não ser de ouro. Um objecto pode ser de ouro mas não brilhar (por exemplo, se estiver sujo). Assim esta pode ser a situação do anel. Logo pode acontecer que ambas as premissas sejam verdadeira e a conclusão falsa, pelo que o argumento não é válido.

b) Em geral, os estudantes da FCT são aplicados. João é um estudante da FCT. Logo o João é aplicado.

Válido.

A premissa apenas indica que a (grande) maioria dos estudantes da FCT é aplicada (a expressão em geral abre a porta a excepções). Assim sendo pode ser que o João seja uma das excepções à regra e invalida o argumento, pois embora ambas as premissas sejam verdadeiras, a conclusão é falsa.

c) Na FCT não há exames ao sábado. ALGA é uma cadeira da FCT. Logo o exame de ALGA não é ao sábado.

Válido.

Sendo ALGA uma cadeira de FCT o seu exame só pode ser nos dias de exame aceites na FCT. Ora assumindo que a primeira premissa é verdadeira, os sábados não são dias de exame, e portanto não haverá exames de ALGA ao sábado.

Na realidade, existem exames de ALGA ao sábado, pelo que embora o argumento seja válido, ele não é sólido, pois uma das premissas (a primeira) não é verdadeira, e portanto não se pode concluir que a conclusão o seja.

6. Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologicamente (Val-TT), logicamente (Val-FO) e/ou analiticamente nos mundos de Tarski (Val-TW).

{Premissa 1, ..., Premissa n } |= Conclusão

{ Small(a) , Smaller(a,c) } |= Large(c)
{ Large(a) , a = b } |= Large(b)
{ SameRow(a,b) , SameRow(b,c) } |= SameRow(a,c)

Val-TT	Val-FO	Val-TW
N	N	N
N	S	S
N	N	S

7. a) Preencha a tabela de verdade relativa às fórmulas P1 e P2 abaixo indicadas

$$P1: \neg A \vee (B \wedge C) \quad \text{e} \quad P2: (\neg A \vee B) \wedge (B \vee C)$$

A	B	C	$\neg A$	$\vee$	$(B \wedge C)$	$(\neg A \vee B)$	$\wedge$	$(B \vee C)$
V	V	V	F	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F	F	F

b) Com base na tabela assinala na caixa e justifique qual a relação tautológica entre P1 e P2

P1 é consequência de P2 ☐

☐ P2 é consequência de P1

P1 e P2 são Equivalentes ☐

☒ Nenhuma das anteriores

Justificação: Existe uma valoração de $A=F$, $B=F$ e $C=F$ que torna P1 verdadeiro mas P2 falso. Logo P2 não é consequência tautológica de P1.

Por outro lado, a valoração $A=V$, $B=V$ e $C=F$ torna P2 verdadeiro mas P1 falso. Logo P1 não é consequência tautológica de P1.

Por mais forte razão, P1 e P2 não são equivalentes (nem P1 é consequência de P2 nem vice-versa).

8. Converta a fórmula seguinte para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente:

$$\neg (A \vee (\neg C \wedge (\neg B \vee (\neg B \wedge C))))$$

$$\neg (A \vee (\neg C \wedge (\neg B \vee (\neg B \wedge C))))$$

$$1 \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg (\neg C \wedge (\neg B \vee (\neg B \wedge C)))$$

Leis de de Morgan

$$2 \Leftrightarrow \neg A \wedge (\neg \neg C \vee \neg (\neg B \vee (\neg B \wedge C)))$$

Leis de de Morgan

$$3 \Leftrightarrow \neg A \wedge (C \vee \neg (\neg B \vee (\neg B \wedge C)))$$

Dupla Negação

$$4 \Leftrightarrow \neg A \wedge (C \vee (\neg \neg B \wedge \neg (\neg B \wedge C)))$$

Leis de de Morgan

$$5 \Leftrightarrow \neg A \wedge (C \vee (B \wedge \neg (\neg B \wedge C)))$$

Dupla Negação

$$6 \Leftrightarrow \neg A \wedge (C \vee (B \wedge (\neg \neg B \vee \neg C)))$$

Leis de de Morgan

$$7 \Leftrightarrow \neg A \wedge (C \vee (B \wedge (B \vee \neg C)))$$

Dupla Negação

$$8 \Leftrightarrow \neg A \wedge (C \vee B)$$

Eliminação

Esta fórmula já está na forma CNF. Para a converter em DNF ...

$$6 \Leftrightarrow (\neg A \wedge C) \vee (\neg A \wedge B)$$

Distribuição de $\wedge$ relativa à $\vee$

Em alternativa, não se simplificando a fórmula no passo 7. a continuação seria

$$8' \Leftrightarrow \neg A \wedge ((C \vee B) \wedge (C \vee B \vee \neg C))$$

Distribuição de $\vee$ relativa à $\wedge$

$$9' \Leftrightarrow \neg A \wedge ((C \vee B) \wedge 1)$$

Tautologia e Elemento Absorvente

$$10' \Leftrightarrow \neg A \wedge (C \vee B)$$

Elemento Neutro

... continuando a transformação como anteriormente ($8 = 10'$).